共立講座　21世紀の数学

27

確率微分方程式

長井　英生・著

共立出版株式会社

刊行にあたって

基礎科学としての数学の重要性は近年ますます増えている．にもかかわらず理工系離れがすすんでいる．その根底には数学離れがある．高等学校の数学教育も新課程に移行し，大学における数学教育も多様化しつつある．

このような状況において渇望されているのは，多様なニーズにこたえる個性的な教科書である．われわれは，現在の数学体系を大胆に再構成した大学の教科書を模索した．旧来の理学部数学科が変貌しつつある現在，有機的なつながりのなかでこそ，多面的な理解や多様な目的にあわせた自由な選択が可能になると信ずる．

きたるべき時代 21 世紀へ向けて，この新しい構成の教科書「共立講座 21 世紀の数学」を世に問う．

編集委員

まえがき

確率微分方程式の理論が日本人数学者伊藤清によって創始されたものであることは，既によく知られているものと思う． Newton, Leibniz による微積分学に基づいて，決定論的な力学法則に従う物理系の時間発展が常微分方程式系により記述され，その理論が多くの数学者によって整備されてきた．それに対して，自然現象や社会現象の中には，そのような常微分方程式系では記述できないものが数多く存在する．たとえば，水の中のブラウン粒子のジグザグな運動や化学反応過程であり，また，株価の不規則な変動などがそうである．不規則な現象の時間発展には，一つの標本をとらえたとき，その軌道がジグザグであるという顕著な特徴があり，決定論的な法則に基づく力学系の解の滑らかな軌道とは様相を異にする．確率解析の立場では，このジグザグな軌道を確率過程の標本路ととらえ，その標本路のダイナミックスを追求する．伊藤清は端的に言って，この不規則性を表すジグザグな標本路のダイナミックスを記述するため，確率微分方程式の概念を導入してそれを解析する基本的手段を与え，不規則な系の微積分学を厳密な数学的理論として構築した．その業績はしばしば，Newton のそれと対比して語られ，また，Itô Calculus の名を冠して称えられる． その仕事は第二次世界大戦中に成されたものであり，論文は，大阪大学で発行していた全国誌上数学談話会というガリ版刷りの印刷物として最初に世に現れたことも逸話としてよく知られている．また，丸山儀四郎は大戦中，軍隊で，兵舎の歩哨に立つ間，その伊藤の論文を勉強し，最初にその仕事を理解した人とされている．丸山はそして，後に，Cameron-Martin-Dynkin-Maruyama-Girsanov の定理として知られる重要な貢献をした．その後も

日本人数学者の貢献が続くが，国田寛・渡辺信三が，2乗可積分マルチンゲールの理論として，確率積分の理論を美しく整備したことが，後の発展に決定的な役割を果たした．巻末に掲げた確率微分方程式に関する書物でも，ほとんどがこの国田・渡辺の理論に基づいて記述されている．本書も当然のこととして，この理論に基づいている．

本書の第1～3章の内容のほとんどは大抵の確率微分方程式に関する書物において共通して書かれていることである．書くに当たって留意したことは，独自性を追求するよりも，何を標準とすべきか，そして標準的な内容を如何に平易に記述するか，そのことにより確率論の標準的な議論を読者が効率よく正確に身につける手助けとなりうるかということである．しかしながら，筆者の非力の故，至らぬところが多々あろうかと思う．ともあれ，第1，2章を読むにあたっては，本文に書くべき事項でも問としたものもあるので，問の部分も解きながら，飛ばさず読み進んでいただきたい．

それに対して，第4章以降では独自性を求めた部分もある．特に拡散過程の生成作用素，コルモゴロフ方程式の記述に粘性解の方法を用いたことは類書にないことである．粘性解の定義は若干迂遠でもあり，非線形の方程式を取り扱うときにこそ威力を発揮するその解の概念を線形の方程式に対しても適用することに多少ためらいもあったが，何より，その概念が確率微分方程式の解に関する期待値の満たす方程式を記述するのに極めて自然であり，また第5章のベルマン方程式の取り扱いとの一貫性も考慮すれば，本書では，必然的な選択のように思われた．また第5章の確率制御に関する部分も，粘性解による記述を含めて必ずしも類書で取り扱われていない内容であろう． 確率解析の応用分野として昨今著しく発展している，数理ファイナンス等との関連で，この内容を教科書に盛り込む意味があろうかと思う．第6章ではかなり大胆な試みをした．確率微分方程式と解析学を結び付ける上で基本的に重要な役割をする伊藤の公式の一般化は応用上の観点からも大変重要と思われるが，この問題に関連する第6章の記述においては，必ずしも自己完結的になっていない部分がある．その場合にはその都度引用文献を挙げておいたので参照して補っていただきたい．

本書の執筆を勧められたのは楠岡成雄教授である．この分野の世界的権威によって書かれた，渡辺信三「確率微分方程式」[43] は長い間，日本語による確率微分方

程式に関する唯一の書物であり続けたが，絶版となっている．そのため，筆者のような浅学非才の身に，重い役目が回ってきた．非才を省みず無謀にもお引き受けしたのは，日本の確率解析の分野には，上に記載した以上に，国際的にみても重要な多くの貢献があり，我々は，恩師や諸先輩，友人による，それらの多大な貢献の恩恵を受けて育ったものであり，いわば，その恩返しとして，後に続く人達のためにいささかでも資するものがあればとの思いからである．楠岡教授には，このような機会をくださったこととともに，日頃からの御啓発，また本書の原稿に関してのアドバイスや誤りの訂正等いただいたことを感謝いたします．また，石井仁司教授から粘性解に関して日頃，御教示いただいていることが本書を書く上で大変有益でした．さらに，内山耕平，貝瀬秀裕，国友直人，高信 敏，竹田雅好，谷口説男の諸氏からは本書の原稿に関するご意見，訂正すべき箇所のご指摘等をいただき，勇気づけていただきました．黒田和孝氏は短期間の間に原稿を通読され，多くの誤植を指摘してくださいました． 以上の方々ならびに出版に関して労を取られた赤城 圭さんに感謝いたします．

1999 年 6 月

著 者

目　　次

1

ブラウン運動とマルチンゲール

連続な道をもつ確率過程の典型であるブラウン運動は，不規則な運動の典型を数学的に理想化したものと考えられる．その不規則性の特質の数学的表現と考えられる，ブラウン運動の道の性質は，マルチンゲール性という概念を通じて普遍化される．この章では，ブラウン運動，マルチンゲールや確率過程に関連する諸定義，概念，性質，定理を示した後，連続局所マルチンゲールに対して，その二乗の Doob–Meyer 分解をその二次変分である連続増加過程の存在を示すことにより与える．そこで展開される議論は確率無限小解析とでも言い表されよう．

1.1　基 礎 概 念

まず，最小限の基礎概念，定義を用意しておこう．初等確率論では，確率変数はその値をユークリッド空間 R^N，あるいはその部分集合にとるものを考えた．そのとる値を一般に，距離空間としておく（したがって確率分布もその上の分布を考える）と，以下の議論で都合がよい．たとえば，$[0,\infty)$ で定義された連続関数全体の空間 $W^N=\mathbf{C}([0,\infty);R^N)$ に値をとる確率変数やその上の分布を考えることが以下ではしばしば起こる．

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間とする．Ξ を距離空間，$\mathcal{B}(\Xi)$ をその部分集合からなる位相的ボレル σ 加法族，すなわちすべての開部分集合を含む最小の σ 加法族とする．Ξ に値をとる確率変数 X が与えられているとする．

【定義 1.1.1】 $\mu_X(B) := P \circ X^{-1}(B) \equiv P(\omega; X(\omega) \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\Xi)$ と μ_X を定義するとき，μ_X は $(\Xi, \mathcal{B}(\Xi))$ 上の確率測度であり，これを X の分布という．また一般に $(\Xi, \mathcal{B}(\Xi))$ に確率測度が与えられているときにそれを Ξ 上の分布という．

まず，最も基本的なガウス型確率変数の定義を与えておく．

【定義 1.1.2】 i)　$m \in R^1, \sigma^2 \in R_+$ が与えられたとき，確率変数 X の特性関数 $\phi(\xi)$ が

$$\phi(\xi) := E[e^{\sqrt{-1}\xi X}] = e^{\sqrt{-1}\xi m - \frac{\sigma^2}{2}\xi^2}, \quad \xi \in R^1 \tag{1.1}$$

となるとき，X を1次元ガウス型確率変数という．

ii)　$M \in R^N$ とし，V を非負定値対称行列とするとき，確率変数 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_N)$ の特性関数 $\phi(\xi)$ が

$$\phi(\xi) := E[e^{\sqrt{-1}\xi^* X}] = e^{\sqrt{-1}\xi^* M - \frac{1}{2}\xi^* V \xi}, \quad \xi \in R^N \tag{1.2}$$

となるとき，X を N 次元ガウス型確率変数という．ここで ξ^* は ξ の転置行列（ベクトル）である．

！注意　$\sigma > 0$ のときは，1次元ガウス型確率変数の分布は平均 m 分散 σ^2 の正規分布 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}]dx$ である．また V が正定値のときは N 次元ガウス型確率変数の分布は平均ベクトル M，共分散行列 V の正規分布 $(2\pi)^{-\frac{N}{2}}(\det V)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{1}{2}(x - M)^* V^{-1}(x-M)]dx$ である．

次に確率過程に関連する定義を与える．

【定義 1.1.3】 Ξ を距離空間とし，Ξ に値をとる確率変数の族 $\{X_t\}_{t \in \mathbf{T}}$ を Ξ 上の確率過程という．ただし，$\mathbf{T}$ はパラメータ空間で，本書では $\mathbf{T} = [0, \infty)$, $\mathbf{T} = [0, T]$, $\mathbf{T} = Z_+$ などをとる．$\{X_t\}$ はしばしば $\{X(t)\}$ と，あるいは，各 t に対して確率変数であることを明確にするとき，$\{X_t(\omega)\}$ や $\{X(t, \omega)\}, \omega \in \Omega$

とも書く．Ξ 上の確率過程が与えられたとき，$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ に対し，

$$\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) := P(X(t_1) \in B_1, \cdots, X(t_n) \in B_n) \qquad (1.3)$$

とおくと，$\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$ は $\mathcal{B}(\Xi^n)$ 上の分布をただ一つ定める．ただし，Ξ^n は Ξ の n 個の直積空間．n と $t_1, t_2, \cdots, t_n$ を動かしたとき，それぞれ分布が定まるがそれらを総称して，$\{X_t\}$ の有限次元分布という．

【定義 1.1.4】 Ξ 上の確率過程 $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$, $\{Y_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が与えられたとき，$P(X_t = Y_t) = 1, \forall t \in \mathbf{T}$ が成立するならば，$\{Y_t\}$ は $\{X_t\}$ （$\{X_t\}$ は $\{Y_t\}$ ）の修正であるという．

【定義 1.1.5】 Ξ 上の確率過程 $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が与えられたとき，$\{X_s\}_{s\leq t}$ を可測にする最小の σ 加法族を $\sigma(X_s; s \leq t)$ と書く．

【定義 1.1.6】 Ξ 上の確率過程 $\{X_t\}$ について，$P(\Omega_0) = 1$ を満たす $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ があって $\omega \in \Omega_0$ に対して $X_t(\omega)$ が t の（左あるいは右）連続関数であるとき，（左あるいは右）連続確率過程という．

1.2 ブラウン運動

積分核

$$g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$$

は，熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= \dfrac{1}{2}\Delta u \\ u(0,x) &= f(x) \end{cases}$$

の基本解として知られている．すなわち，この初期値問題の解 u は

$$u(t,x) = \int_{R^N} g(t,x,y)f(y)dy$$

として表されることが知られている．この $g(t,x,y)$ は確率論では，最も基本的な確率過程である，ブラウン運動の推移確率密度関数となっていることに注意しておこう．後に見るように，ブラウン運動のようなマルコフ性をもつ確率過程は推移確率密度を与えることによりその法則が定まるが，ここではまず，ブラウン運動の定義を与える．

【定義 1.2.1】 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ で定義された R^N 上の確率過程 $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が N 次元ブラウン運動であるとは以下の条件を満たすときをいう．

i) $0\le s\le t$ に対して B_t-B_s は平均ベクトル 0 共分散行列 $(t-s)E$ の N 次元ガウス型確率変数である．ただし，E は N 次元単位行列．

ii) $0\le s<t$ に対して B_t-B_s は $\sigma(B_u;u\le s)$ と独立である．

iii) $\{B_t\}$ は連続確率過程である．

N 次元ブラウン運動の初期分布

$$\nu(A)=P(\,B_0\in A\,),\quad A\in\mathcal{B}(R^N)$$

をあらかじめ規定することも多い．特に $\nu(dz)=\delta_x(dz)$ のときすなわち，$P(B_0=x)=1$ のとき x から出発するブラウン運動という．

特性関数を用いた計算により，次の問は容易に答えられるであろう．

問 1.1 R^N 上の確率過程 $\{B_s\}=\{(B_s^1,B_s^2,\cdots,B_s^N)\}$ について $\{B_s\}$ が 0 から出発する N 次元ブラウン運動であることと，各 $\{B_s^i\}$, $i=1,2,\cdots,N$ が 0 から出発する 1 次元ブラウン運動で $\{B_s^1\},\cdots,\{B_s^N\}$ が独立であることと同値である．このことを示せ．

問 1.2 次を示せ．

i) $\{B_t\}$ を 0 から出発する 1 次元ブラウン運動とする．このとき，$E[B_tB_s]=t\wedge s$. ただし $t\wedge s=\min(t,s)$. また　$E[B_t^4]=3t^2$ である．

ii) （回転不変性）$\{B_t\}$ を N 次元ブラウン運動とし，A を N 次直交行列とする．このとき，$\{AB_t\}$ も N 次元ブラウン運動である．

iii) (スケール則) $\{B_t\}$ を N 次元ブラウン運動とする．このとき，各 $c>0$ に対して $\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct}$ も N 次元ブラウン運動である．

iv) $\{B_t\}$ を N 次元ブラウン運動とするとき，$\{B_{t+s}-B_s\}_{t\geq 0}$ は 0 から出発するブラウン運動である．

構成は後に回して，ブラウン運動の道 (標本路，軌道) に関する顕著な性質をまず述べておく．ブラウン運動はその軌道を見るとき，各時点ごとに，次の瞬間どの方向に動くか予測できないという，不規則性を数学的に理想化したものとなっている．そのことを表したものが次の定理である．また，ブラウン運動の道はそのジグザグな動きの反映として，どんな時間幅をとっても長さをもたない（長さ無限大）という性質をもつ．しかしながら，二次変分をとれば有限になる．そのことを次に示す．また後に見るように，この二次変分有限という性質はマルチンゲール性（1.6 節参照）に基づくものであることに注意しておく．そしてこの性質は第 2 章で確率積分を定義する基礎となる．

【定理 1.2.2】 B_t を 1 次元ブラウン運動とする．このとき，

$$P(\, B_t\text{は微分可能な点をもたない}\,)=1$$

である．

証明 $P(B_0=0)=1$ として証明する． $[0,T]$ で考える．

$$D_{m,k}=\left\{\omega\,;\exists s\in[0,T],\text{s.t.}\ |B_t-B_s|\leq m|t-s|,\ \forall t\in[s-\frac{T}{k},s+\frac{T}{k}]\right\}$$

とおく．

$$\left\{\omega\,;\exists t\in[0,T],\exists\lim_{h\to 0}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}\right\}\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}D_{m,k}$$

より，$P(\bigcup_{k=1}^{\infty}D_{m,k})=0$ を示せばよい．$E_n=\bigcup_{i=1}^{n-2}E_{n,i}$，$E_{n,i}=\bigcap_{l=i}^{i+2}\{|B_{\frac{lT}{n}}-B_{\frac{(l-1)T}{n}}|\leq\frac{5mT}{n}\}$，$i=1,2,\cdots,n-2$ とおくとき，$D_{m,k}\subset\bigcap_{n=5k}^{\infty}E_n$ である．実際，$\omega\in D_{m,k}$，$s\in[\frac{i-1}{n}T,\frac{i+2}{n}T]$，$n\geq 5k$ であれば，$|B_{\frac{l}{n}T}-B_{\frac{l-1}{n}T}|\leq|B_{\frac{l}{n}T}-B_s|+|B_{\frac{l-1}{n}T}-B_s|\leq\frac{5m}{n}T$, $l=i,i+1,i+2$ であるからである．スケー

ル則に注意すれば,

$$P(E_n) \le \sum_{i=1}^{n-2} P(E_{n,i}) = (n-2)P(|B_{\frac{T}{n}}| \le \frac{5mT}{n})^3$$
$$= (n-2)P(\sqrt{\frac{T}{n}}|B_1| \le \frac{5mT}{n})^3 \le \frac{2(n-2)}{(\sqrt{2\pi})^3}(\frac{5m\sqrt{T}}{\sqrt{n}})^3$$

よって

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{m,k}) \le P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=5k}^{\infty} E_n) \le \liminf_{n\to\infty} P(E_n) = 0$$

■

【定理 1.2.3】 B_t を N 次元ブラウン運動とする．$t>0$ に対して，分割

$$\Delta : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t < t_{n+1}$$

をとり，$|\Delta| = \max_i |t_{i+1} - t_i| \to 0$ とするとき 各 t に対して

$$E[(\sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 + |B_t - B_{t_n}|^2 - Nt)^2] \to 0$$

証明　$N=1$ で示せばよい．

$$Q_t(B;\Delta) := \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 + |B_t - B_{t_n}|^2$$

とおくとき　$E[Q_t(B;\Delta)] = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) + (t - t_n) = t$,

$$\begin{aligned}
&E[(Q_t(B;\Delta) - t)^2] \\
&= E[(\sum_{i=0}^{n-1}\{|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 - (t_{i+1} - t_i)\} + |B_t - B_{t_n}|^2 - (t - t_n))^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E[\{|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 - (t_{i+1} - t_i)\}^2] + E[\{|B_t - B_{t_n}|^2 - (t - t_n)\}^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\{3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2\} + 3(t - t_n)^2 - (t - t_n)^2
\end{aligned}$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)^2 + (t - t_n)^2 \le 2t \max_i |t_{i+1} - t_i|$$

より，$|\Delta| \to 0$ のとき $E[(Q_t(B;\Delta) - t)^2] \to 0$ である． ■

問 1.3　ブラウン運動の標本路の全変動を

$$V_t := \sup_{\Delta}(\sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| + |B_t - B_{t_n}|)$$

とおくとき，

$$P(V_t = \infty) = 1, \quad \forall t > 0$$

を示せ．

1.3　ブラウン運動の道の空間の上への実現

$W^N = \mathbf{C}([0,\infty); R^N)$ すなわち $[0,\infty)$ で定義され，R^N に値をとる連続関数全体を考える．$\{B_t\}$ を N 次元ブラウン運動とすると定義により確率 1 の ω に対して $B_t(\omega)$ は t の連続関数であるから $B_t(\omega)$ を Ω から W^N への写像とみるとき，その写像を $B_\cdot(\omega)$ と表せば，

$$P(\omega; B_\cdot(\omega) \in W^N) = 1$$

である．さて，$w_1, w_2 \in W^N$ に対して

$$d(w_1, w_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(\sup_{0\le t\le n} |w_1(t) - w_2(t)| \wedge 1)$$

とおくと，W^N は d を距離とする完備距離空間となる．その位相的ボレル σ 加法族を $\mathcal{B}(W^N)$ とし，

$$\mu_B(F) := P \circ B_\cdot^{-1}(F) \equiv P(\omega; B_\cdot(\omega) \in F), \quad F \in \mathcal{B}(W^N)$$

と定義すると μ_B は $(W^N, \mathcal{B}(W^N))$ 上の分布である．この分布を N 次元ウィーナー測度という．特に $P(B_0 = x) = 1$, $x \in R^N$ なる N 次元ブラウン運動が与えられたとき対応する分布 $\mu_B(\cdot)$ を $P_x(\cdot)$ で表す．このとき $w \in W^N$ に対して座標

関数 $X_t(w) = w(t)$ をとると X_t は確率空間 $(W^N, \mathcal{B}(W^N), P_x)$ で定義された x から出発するブラウン運動である．ここでは逆に，ブラウン運動を構成するにあたって，この空間 $(W^N, \mathcal{B}(W^N))$ 上に実現することを考える．そのためにまず，より広い空間

$$\Omega^N := (R^N)^{[0,\infty)} \equiv \{\omega\,;\omega(\cdot):[0,\infty)\mapsto R^N\}$$

を用意する．座標関数 $X_t(\omega) = \omega(t), \omega \in \Omega^N$ により，ω の有限個の座標を指定するとき，Ω^N の部分集合が定まるがこれを筒集合という．すなわち，$k = 1, 2, \cdots,$ に対して，$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathcal{B}(R^N)$ をとったとき，

$$\left\{\omega \in \Omega^N; X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \cdots, X_{t_k} \in B_k\right\}$$

の形の部分集合である．筒集合の有限和全体は明らかに有限加法族であるが，その有限加法族を含む最小の σ 加法族を $\mathcal{B}^N$ と書く．$(\Omega^N, \mathcal{B}^N)$ 上の確率測度を構成する手続きにおいてコルモゴロフの拡張定理が有用となる．さて，与えられた確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で $[0, \infty)$ をパラメータとする確率過程 $\{X_t\}$ に対してその有限次元分布 $\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$ は (1.3) によって定められるが，逆に分布の族 $\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$, $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $n = 1, 2, \cdots,$ が与えられたとき，それらを有限次元分布とする確率過程が存在するために $\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$ に課せられる条件が次のコルモゴロフの拡張定理の整合性条件である．

$$\begin{aligned}
&\mu_{t_1,\cdots,t_{i-1},t_{i+1},\cdots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_{i-1} \times B_{i+1} \times \cdots \times B_n) \\
&\quad = \mu_{t_1,\cdots,t_{i-1},t_i,t_{i+1},\cdots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_{i-1} \times R^N \times B_{i+1} \times \cdots B_n) \qquad (1.4)\\
&\quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathcal{B}(R^N)
\end{aligned}$$

【定理 1.3.1】 整合性条件 (1.4) を満たす分布の族 $\{\mu_{t_1,\cdots,t_n}\}$, $0 \le t_1 < \cdots < t_n$, $n = 1, 2, \cdots$ が与えられているとする．このとき $(\Omega^N, \mathcal{B}^N)$ 上に確率測度 P がただ一つ存在して X_t の有限次元分布は $\mu_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$ に等しい．

この定理の証明は付録で与える．

問 1.4 ν を $(R^N, \mathcal{B}(R^N))$ 上の確率測度とし，$g(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}, x \in R^N, t > 0$ とする．$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対して

$$\mu_{t_0,t_1,\cdots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n)$$
$$= \int_{B_0 \times \cdots \times B_n} \nu(dx_0) \prod_{i=1}^{n} g(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

とおくとき，$\mu_{t_0,\cdots,t_n}$ は整合性条件 (1.4) を満たすことを示せ．

上の定理 1.3.1 と問 1.4 により $(\Omega^N, \mathcal{B}^N)$ 上に確率測度 P が存在し, $\{X_t\}$ の有限次元分布は $\mu_{t_0,\cdots,t_n}$ となっていることがわかる．さらにその定義より $X_t - X_s$ は平均 0 共分散行列 $(t-s)E$ の N 次元ガウス型確率変数である．また $X_t - X_s$ は各 $u \le s$ に対し X_u と独立になっている．しかしながら，$X_t(\omega)$ は 必ずしも t の連続関数になっていない． また次のことに注意しておこう．

! 注意 $W^N \notin \mathcal{B}^N$ である．なぜなら，$S \subset [0,\infty)$ に対して $\mathcal{F}_S = \sigma(X_t\,; t \in S)$ とし，$\mathcal{F}^* := \bigcup_{S:\text{可算}} \mathcal{F}_S$ とおく．このとき，$A_n \in \mathcal{F}^*$ ならば，$\exists S_n$ に対して $A_n \in \mathcal{F}_{S_n}$, S_n : 可算 $\subset [0,\infty)$, $n = 1, 2, \cdots$ であり，$S^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ とすると S^* も可算集合である．したがって，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_{S^*} \subset \mathcal{F}^*$$

となり $\mathcal{F}^*$ は σ 加法族となることがわかり，またすべての筒集合を含むから $\mathcal{F}^* = \mathcal{B}^N$ である．もし，$W^N \in \mathcal{B}^N$ であるとすると，ある可算集合 $S \subset [0,\infty)$ があって $W^N \in \mathcal{F}_S = \sigma(X_t\,; t \in S)$ となり，したがって $w \in W^N$ で $X_t(w) = X_t(w')$, $\forall t \in S$ ならば $w' \in W^N$ となる．しかしながら $w(t) = w'(t), \forall t \in S$ で不連続点をもつ $w' \in \Omega^N$ は存在するからこれは矛盾である．

さて，$(W^N, \mathcal{B}(W^N))$ の上にブラウン運動を実現するには次の定理が必要である．

【定理 1.3.2】 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された確率過程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ が次の条件を満たしているとする.

$$E[|X_t - X_s|^\alpha] \le c|t-s|^{1+\beta}, \quad 0 \le s, t \le 1 \tag{1.5}$$

$\exists\alpha, \beta, c > 0$. このとき $\{X_t\}$ の修正である連続確率過程 $\{Y_t\}$ があって，ある $\delta > 0$ に対して

$$P(\omega\,; \exists\eta(\omega), \sup_{0\le s,t\le 1, |t-s|<\eta(\omega)} \frac{|Y_t - Y_s|}{|t-s|^\lambda} \le \delta) = 1, \quad 0 < \lambda < \frac{\beta}{\alpha} \tag{1.6}$$

証明　各 $\epsilon > 0$ に対して

$$P(|X_t - X_s| > \epsilon) \le \frac{E[|X_t - X_s|^\alpha]}{\epsilon^\alpha} \le c\epsilon^{-\alpha}|t-s|^{1+\beta} \tag{1.7}$$

であるから，$\epsilon = 2^{-\lambda n}, 0 < \lambda < \frac{\beta}{\alpha}$ とすると

$$\begin{aligned}
&P(\sup_{1\le k\le 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \ge 2^{-\lambda n}) \\
&= P(\bigcup_{k=1}^{2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \ge 2^{-\lambda n}) \\
&\le \sum_{k=1}^{2^n} P(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \ge 2^{-\lambda n}) \\
&\le 2^n c 2^{-n(1+\beta-\alpha\lambda)} = c2^{-n(\beta-\alpha\lambda)}
\end{aligned}$$

$\sum_n c2^{-n(\beta-\alpha\lambda)} < \infty$ なので，ボレル・カンテリの補題により $P(\Omega_0) = 1$ なる $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ があって，各 $\omega \in \Omega_0$ に対して $n_0(\omega) \in Z_+$ があり

$$\sup_{1\le k\le 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| < 2^{-\lambda n}, \quad \forall n \ge n_0(\omega) \tag{1.8}$$

を満たす. $D_n = \{\frac{k}{2^n}; k = 0, 1, \cdots, 2^n\}$, $D = \bigcup_{n=1}^\infty D_n$ とおき，$t, s \in D_n, n > n_0(\omega)$ とし，$0 < t - s < 2^{-n_0(\omega)}$ とするとき，$n > \exists m \ge n_0(\omega)$ で $\frac{1}{2^{m+1}} \le t - s < \frac{1}{2^m}$ となるものがとれる.

$$s_1 = \min\left\{s' \in D_{n-1}, s \le s'\right\}, \; t_1 = \max\left\{t' \in D_{n-1}, t' \le t\right\}$$

とおくと，$|s-s_1|, |t-t_1| \le \frac{1}{2^n}$ となり，(1.8) より，$|X_t - X_{t_1}|, |X_{s_1} - X_s| \le 2^{-\lambda n}$. したがって，

$$|X_t - X_s| \le 2^{-\lambda n+1} + |X_{t_1} - X_{s_1}|,\ s_1, t_1 \in D_{n-1}, t_1 - s_1 < \frac{1}{2^m}$$

となるから，上の s, t を s_1, t_1 とおきかえることにより，$s_2, t_2; s_3, t_3; \cdots$ を逐次とって，同様の手続きをすると結局 $t_{n-(m+1)}, s_{n-(m+1)} \in D_{m+1}$,

$$|X_t - X_s| \le 2 \sum_{j=0}^{n-(m+2)} 2^{-\lambda(n-j)} + |X_{t_{n-(m+1)}} - X_{s_{n-(m+1)}}|$$

とできるが，$t_{n-(m+1)} - s_{n-(m+1)} = \frac{1}{2^{m+1}}$ となるので，再び (1.8) により，

$$|X_t - X_s| \le 2 \sum_{j=0}^{n-(m+1)} 2^{-\lambda(n-j)} \le \frac{2}{1-2^{-\lambda}}(2^{-\lambda})^{m+1} \le \delta|t-s|^\lambda, \delta = \frac{2}{1-2^{-\lambda}}$$

となるから 各 $\omega \in \Omega_0$ に対して $X_t(\omega)$ の D 上でのヘルダー連続性が示される．

$\omega \notin \Omega_0$ に対して $Y_t(\omega) = 0$ とおき，$\omega \in \Omega_0$ に対しては $t \in [0,1]$ に対して $t_n \in D$, $\lim_{n\to\infty} |t_n - t| = 0$ なる 2 進数の列をとって $Y_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$ と定義することができ，こうしてできた Y_t は (1.6) を満たす．また $X_t = Y_t$ a.s. $t \in D$ であり，$t \in D^c \cap [0,1]$ に対しては (1.7) より $\lim_{n\to\infty} P(|X_{t_n} - X_t| > \epsilon) = 0$, $\forall \epsilon > 0$ でかつ $P(\lim_{n\to\infty} |X_{t_n} - Y_t| = 0) = 1$ より $P(|X_t - Y_t| = 0) = 1$ となることがわかるから Y_t が X_t の修正であることがわかる． ■

***!* 注意**　ここでは $t \in [0,1]$ としたが，$t \in [0,T]$ とすることができるのは明らかであるから容易にパラメータ空間を $[0,\infty)$ にした確率過程に対して適用できるよう拡張できる．

問 1.5　上の定理 1.3.1 と問 1.4 を使って構成した $(\Omega^N, \mathcal{B}^N, P)$ 上の確率過程 $\{X_t\}$ の各成分 X_t^i について

$$E[|X_t^i - X_s^i|^{2n}] = c_n|t-s|^n, \quad \forall n,\ i = 1, 2, \cdots, N$$

を示せ．

定理 1.3.2 と 問 1.5 を使えば $(\Omega^N, \mathcal{B}^N, P)$ の上で定義された X_t の修正である連続確率過程 Y_t があってその標本路は 確率 1 で λ 次 $(0 < \lambda < \frac{1}{2})$ ヘルダー連続であることがわかる．$Y_\cdot(\omega) : \Omega^N \mapsto W^N$, $\hat{P} = P \circ Y_\cdot(\omega)^{-1}$ とおき，$w \in W^N$ の座標関数を $B_t(w) = w(t)$ととれば，確率空間 $(W^N, \mathcal{B}^N, \hat{P})$ で定義された連続確率過程 $\{B_t\}$ は 初期分布を ν とする N 次元ブラウン運動である．

1.4　σ 加法族の増大系，停止時刻

確率過程は確率変数の時間発展であり，その過去の軌跡を情報とみるとき，情報の増大系が対応する．その数学的表現がフィルトレーション（ σ 加法族の増大系）である． 確率過程が生成する σ 加法族の増大系のみならず，より一般に次のような σ 加法族の増大系を確率空間に付随して定義しておこう．

【定義 1.4.1】 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と $\mathcal{F}$ の部分集合の族 $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbf{T}$ で次の i), ii) を満たすものが与えられているとする．

i) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \quad 0 \le s < t$

ii) 各 t に対して $\mathcal{F}_t$ は σ 加法族．

このとき，$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ をフィルター付き確率空間とよぶ．

■ **例 1.1** ■ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された N 次元ブラウン運動を $\{B_t\}$ とするとき，$\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s; s \le t)$ とおけば $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t^B)$ はフィルター付き確率空間である．この $\mathcal{F}_t^B$ をブラウン運動の生成するフィルトレーションという．

以下では，フィルター付き確率空間が与えられているものとする．

【定義 1.4.2】 $\{X_t\}$ を距離空間 Ξ 上の確率過程とする．

i) 各 t に対して X_t が $\mathcal{F}_t$ 可測であるとき，$\{X_t\}$ が $\mathcal{F}_t$ に適合しているという．

ii) 各 t に対して写像 $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega) \in \Xi$ が $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ に関して可測であるとき，確率過程 $\{X_t\}$ が $\mathcal{F}_t$ 発展的可測であるという．

【補題 1.4.3】 確率過程 $\{X_t\}$ が $\mathcal{F}_t$ に適合していて X_t が左（右）連続ならば $\{X_t\}$ は $\mathcal{F}_t$ 発展的可測である．

証明　X_t が右連続のときに示す．

$$X_s^{(n)}(\omega) := X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega), \quad \frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{(k+1)t}{2^n},\ k = 0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1$$

と定義する．このとき，仮定より $X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega)$,　$1_{\{\frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{(k+1)t}{2^n}\}}$ はともに $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ 可測であるから $(s,\omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ は $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ 可測．したがって $X_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega)$,　$(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$ が X_s の右連続性から従うので補題が示された．■

【定義 1.4.4】 $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ と定義する．$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ となるとき，$\mathcal{F}_t$ は右連続であるという．

問 1.6　$\{B_t\}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義されたブラウン運動とする．$\mathcal{F}_t^B := \sigma(B_s; s \leq t)$ は左連続であるが右連続ではないことを示せ．

フィルター付き確率空間が与えられたとき，確率論特有の概念である，停止時刻（またはマルコフ時刻という）の概念を導入することができる．確率過程がある集合に到達（または流入）する時刻はその例となる．

【定義 1.4.5】 $[0,\infty]$ に値をとる確率変数 $\tau(\omega)$ は各 t に対して $\{\omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ となるとき停止時刻であるという．

問 1.7　$\mathcal{F}_t$ が右連続のとき $\tau(\omega)$ が停止時刻であることは，各 t に対して $\{\tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$ となることと同値であり，またこのことは $X_t(\omega) := 1_{[0,\tau(\omega))}(t)$ が $\mathcal{F}_t$ に適合していることと同値である．このことを示せ．

【補題 1.4.6】 $\{X_t\}$ を距離空間 Ξ 上の確率過程とする．X_t が右連続で $\mathcal{F}_t$ に適合しているとする．また $\mathcal{F}_t$ は右連続とする．Ξ の開部分集合 G に対して

$$\sigma_G = \begin{cases} \inf\{t \geq 0; X_t \in G\}, & \{\} \neq \emptyset \text{ のとき} \\ \infty, & \{\} = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義すると σ_G は停止時刻である．また Ξ の閉集合 F に対しても σ_F を同様に定義するとき，X_t が連続ならば σ_F も停止時刻である．

証明

$$\{\sigma_G \geq t\} = \{X_s \in G^c, s < t\} = \bigcap_{r<t, r\in Q_+} \{X_r \in G^c\}$$

となるので $\{\sigma_G < t\} = \bigcup_{r<t,r\in Q_+}\{X_r \in G\}$．したがって，上の 問 1.7 より補題が示される．σ_F については下の問． ■

***!* 注意**　上の σ_G を集合 G への流入時刻という．σ_G の定義で $t \geq 0$ とあるのを $t > 0$ と変えたものを到達時刻という．この到達時刻も停止時刻である．

問 1.8　上の補題の証明を完結せよ．

問 1.9　τ を停止時刻とする．このとき

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}; A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}$$

とおくと $\mathcal{F}_\tau$ は σ 加法族である．このことを示せ．

【補題 1.4.7】　$\sigma, \tau, \sigma_n, n = 1, \cdots,$ を停止時刻とする．このとき，

i)　$\sigma \vee \tau, \sigma \wedge \tau$ はともに停止時刻である．

ii)　$\sigma_n \nearrow$ のとき，$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ は停止時刻である．また $\mathcal{F}_t$ が右連続のとき，$\sigma_n \searrow$ ならば，$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ も停止時刻である．

iii)　$\sigma(\omega) \leq \tau(\omega), \forall\omega$ ならば $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ である．

iv)　$\mathcal{F}_t$ が右連続のとき，$\sigma_n(\omega) \searrow \sigma(\omega), \forall\omega$ ならば $\bigcap_n \mathcal{F}_{\sigma_n} = \mathcal{F}_\sigma$ である．

v)　$\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$

vi)　$\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leq \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$

証明　i) $\{\sigma \vee \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}$, $\{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}$ より明

らか.

ii) $\sigma_n \nearrow$ のとき，$\{\sigma \le t\} = \{\sigma > t\}^c = [\bigcup_n \{\sigma_n > t\}]^c$ より明らか．$\sigma_n \searrow$ のとき，$\{\sigma < t\} = \bigcup_n \{\sigma_n < t\}$ および，問 1.7 を使ってわかる.

iii) $A \cap \{\tau \le t\} = A \cap \{\sigma \le t\} \cap \{\tau \le t\}$ より明らか.

iv) 問 1.7 と同様にして，$\mathcal{F}_t$ が右連続ならば，$A \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t$ なることと $A \cap \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t$ が同値であることがわかる．したがって，$A \cap \{\sigma < t\} = A \cap [\bigcup_n \{\sigma_n < t\}] = \cup_n [A \cap \{\sigma_n < t\}]$ より示される.

v) $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ は iii) より，自明．逆の包含関係は $A \cap \{\sigma \wedge \tau \le t\} = [A \cap \{\sigma \le t\}] \cup [A \cap \{\tau \le t\}]$ からわかる.

vi) $\{\sigma \le \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma \le t\} \cap \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \wedge t \le \tau \wedge t\}$ であり，$\sigma \wedge t$, $\tau \wedge t$ は $\mathcal{F}_t$ 可測であるから，$\{\sigma \le \tau\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ すなわち，$\{\sigma \le \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$. したがって $\{\sigma > \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$.

また，$\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma \wedge t < \tau \wedge t\} \cap \{\tau \le t\}$ であるから $\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ すなわち，$\{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$. したがって，$\{\sigma \ge \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$. また $\{\sigma = \tau\} = \{\sigma \le \tau\} \cap \{\sigma \ge \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$. σ と τ の役割を入れ替えて vi) を得る.　■

【定義 1.4.8】　確率過程 $\{B_t\}$ は 次の i), ii), iii) を満たすとき N 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動であるという.

i) $\{B_t\}$ は $\mathcal{F}_t$ に適合している.

ii) 各 $t > s \ge 0$ に対して $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_s$ と独立である平均ベクトル 0 共分散行列 $(t-s)E$ の N 次元ガウス型確率変数である.

iii) $\{B_t\}$ は連続確率過程である.

問 1.10　上の ii) は次と同値であることを示せ.

$$E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)}, \quad \forall t > s \tag{1.9}$$

たとえば，N 次元ブラウン運動 $\{B_t\} = \{(B_t^1, \cdots, B_t^N)\}$ に対して，$\mathcal{F}_t^B := \sigma(B_s; s \le t)$ とおくとき，各 B_t^i, $i = 1, 2, \cdots, N$ は 1 次元 $\mathcal{F}_t^B$ ブラウン運動で

ある．

問 1.11　$\{B_t\}$ を N 次元ブラウン運動とするとき，$B_{t+s} - B_s$ は $\mathcal{F}_{s+}^B$ と独立であり，B_t は N 次元 $\mathcal{F}_{t+}^B$ ブラウン運動であることを示せ．

【補題 1.4.9】　N 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動 $\{B_t\} = \{(B_t^1, \cdots, B_t^N)\}$ について，各 $t \geq s > 0$ に対して，

i)　$E[B_t^i | \mathcal{F}_s] = B_s^i, \quad i = 1, \cdots, N$

ii)　$E[(B_t^i - B_s^i)(B_t^j - B_s^j) | \mathcal{F}_s] = \delta_{ij}(t - s)$

である．

証明　上の 問 1.10 を使えばよい．■

【補題 1.4.10】　$\{B_t\}$ を 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された，初期分布を ν とする N 次元ブラウン運動とする．$\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s; s \leq t)$, $\mathcal{F}^B = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t^B$, $\mathcal{N} = \{F \subset \Omega; F \subset \exists G \in \mathcal{F}^B,\ P(G) = 0\}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{N}$ とするとき，$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ である．

証明　問 1.4 で導入した $g(t, x)$ を使って

$$T_t f(x) = \int g(t, y - x) f(y) dy$$

と定義する．このとき，f が有界可測のとき，$T_t f(x)$ も有界可測であることに注意しよう．また，問 1.11 から $B_{t+s} - B_s$ は $\mathcal{F}_{s+}^B$ と独立なブラウン運動になっていることに注意する．このとき，$s \leq t_1 < t_2$ とし，f_1，f_2 を有界可測とするとき，

$$\begin{aligned}
&E[f_1(B_{t_1}) f_2(B_{t_2}) | \mathcal{F}_{s+}^B] \\
&= E[f_1(B_{t_1}) E[f_2(B_{t_2} - B_{t_1} + B_{t_1}) | \mathcal{F}_{t_1+}^B] | \mathcal{F}_{s+}^B] \\
&= E[f_1(B_{t_1})(T_{t_2 - t_1} f_2)(B_{t_1}) | \mathcal{F}_{s+}^B] \\
&= T_{t_1}(f_1 T_{t_2 - t_1} f_2)(B_s) \\
&= E[f_1(B_{t_1}) f_2(B_{t_2}) | \mathcal{F}_s^B], \quad P- \text{ a.s.}
\end{aligned}$$

である．このことを繰り返せば一般に，$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < s \le t_k < t_{k+1} < \cdots < t_n$ と，有界可測な f_1, f_2, $\cdots, f_n$ に対して

$$\begin{aligned} &E[f_1(B_{t_1})f_2(B_{t_2})\cdots f_n(B_{t_n})|\mathcal{F}^B_{s+}] \\ &\quad = f_1(B_{t_1})\cdots f_{k-1}(B_{t_{k-1}})E[f_k(B_{t_k})\cdots f_n(B_{t_n})|\mathcal{F}^B_{s+}] \\ &\quad = f_1(B_{t_1})\cdots f_{k-1}(B_{t_{k-1}})E[f_k(B_{t_k})\cdots f_n(B_{t_n})|\mathcal{F}^B_{s}], \ \ P- \text{ a.s.} \end{aligned}$$

となる．特に $f_i(x) = 1_{\Gamma_i}(x), \Gamma_i$: ボレル，$i = 1, \cdots, n$, ととれば，

$$\begin{aligned} &P(B_{t_1} \in \Gamma_i, \cdots, B_{t_n} \in \Gamma_n|\mathcal{F}^B_{s+}) \\ &\quad = 1_{\{B_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,B_{t_{k-1}}\in\Gamma_{k-1}\}}P(B_{t_k} \in \Gamma_k, \cdots, B_{t_n} \in \Gamma_n|\mathcal{F}^B_s), \ \ P- \text{ a.s.} \end{aligned}$$

したがって，

$$\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{F}^B; P(F|\mathcal{F}^B_{s+}) \text{ が } \mathcal{F}^B_s \text{ 可測な修正をもつ }\}$$

とするとき，$\mathcal{D}$ はディンキン系である（付録参照）．よって，付録のディンキン系定理から 任意の $G \in \mathcal{F}^B$ に対して $P(G|\mathcal{F}^B_{s+})$ は $\mathcal{F}^B_s$ 可測な修正をもつ．その修正を $\tilde{1}_G$ と表すことにする． さて，$G \in \mathcal{F}^B_{s+}$ をとったとき，$\tilde{G} = \{\tilde{1}_G = 1\} \in \mathcal{F}^B_s$ とおけば $G \ominus \tilde{G} = \{1_G \neq \tilde{1}_G\} \in \mathcal{N}$ だから $G \in \mathcal{F}_s$ がわかる．$F \in \mathcal{F}_{s+} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{s+\frac{1}{n}}$ に対して，各 n について $G_n \in \mathcal{F}^B_{s+\frac{1}{n}}$, $F \ominus G_n \in \mathcal{N}$ なる G_n があるから，$G = \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{n=m}^\infty G_n$ ととれば，$G \backslash F \subset \bigcup_n (G_n \backslash F) \in \mathcal{N}$ かつ，$F \backslash G \subset \bigcup_n (F \backslash G_n) \in \mathcal{N}$, また，$G \in \mathcal{F}^B_{s+} \subset \mathcal{F}_s$ だから，$F \in \mathcal{F}_s$，すなわち，$\mathcal{F}_{s+} \subset \mathcal{F}_s$ となり，題意が示された． ■

1.5　マルチンゲール：離散時間の場合

フィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbf{T}}$ が与えられているものとする．

【定義 1.5.1】 R^1 上の確率過程 $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が以下を満たすとき，劣マルチンゲールという．

i) $\{X_t\}$ は $\mathcal{F}_t$ に適合している．

ii) $E[|X_t|] < \infty$

iii)　$E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ a.s.　$\forall t \geq s,\ t, s \in \mathbf{T}$

また $\{-X_t\}$ が劣マルチンゲールであるとき $\{X_t\}$ を優マルチンゲール，$\{X_t\}$，$\{-X_t\}$ がともに劣マルチンゲールであるとき $\{X_t\}$ をマルチンゲールという．

問 1.12　X を劣マルチンゲールとし，$f(x)$ を単調非減少凸関数とする．$f(X_t)$ が可積分ならば $f(X_t)$ も劣マルチンゲールであることを示せ．また X がマルチンゲールのときは f の単調性の仮定を省いても同じ結論が得られることを示せ．

パラメータ集合が $\mathbf{T} = Z_+$ の場合を考える．$\{Y_n\}_{n\in Z_+}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された独立同分布確率変数列であるとし，$E[Y_1] = 0$ とする．$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$，$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_i; i = 1, 2, \cdots, n)$ と定義すると $\{X_n\}$ はマルチンゲールである．また，Y_n を $E[Y_1] = 1$ なる独立同分布非負確率変数列とし，$X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$, $\mathcal{F}_n$ を上と同様に定義すると，この $\{X_n\}$ もマルチンゲールとなる．連続時間パラメータで考えたとき，この2つの例に相当するものが，ブラウン運動であり，ブラウン運動の指数関数から決まる指数マルチンゲールである（問 1.13 および問 1.14 参照）．さて，以下ではパラメータ集合 $\mathbf{T} = Z_+$ の場合にマルチンゲールに関する諸定理を準備しておこう．以下ではしばらく，フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_n)_{n\in Z_+}$ で定義された劣マルチンゲール $\{X_n\}_{n\in Z_+}$ を考えていく．停止時刻 $\tau(\omega)$ は $Z_+ \cup \{\infty\}$ に値をとる $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n$ となる確率変数である．

【定理 1.5.2（任意抽出定理）】　τ_1, τ_2 を有界な停止時刻で $\tau_1 \leq \tau_2$ a.s. なるものとする．このとき，劣マルチンゲール $\{X_n\}$ に対して

$$E[X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}] \geq X_{\tau_1} \quad \text{a.s.}$$

したがって，$E[X_{\tau_2}] \geq E[X_{\tau_1}]$ である．また，X_n が一様可積分（付録参照）ならば，任意の $\tau_1 \leq \tau_2 < \infty$ a.s. なる停止時刻に対して上が成立する．

証明
$$E[X_{\tau_2}; A] \geq E[X_{\tau_1}; A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$$

を示せばよいが，そのために，各 n に対して

$$E[X_{\tau_2}; A \cap \{\tau_1 = n\}] \geq E[X_{\tau_1}; A \cap \{\tau_1 = n\}]$$

なることを見ればよい．$B := A \cap \{\tau_1 = n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{\tau_2 \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$ に注意して

$$\begin{aligned}
E[X_{\tau_1}; B] &= E[X_n; B] = E[X_n; \{\tau_2 \geq n\} \cap B] \\
&= E[X_n; \{\tau_2 = n\} \cap B] + E[X_n; \{\tau_2 \geq n+1\} \cap B] \\
&\leq E[X_{\tau_2}; \{\tau_2 = n\} \cap B] + E[X_{n+1}; \{\tau_2 \geq n+1\} \cap B] \\
&= E[X_{\tau_2}; \{n \leq \tau_2 \leq n+1\} \cap B] + E[X_{n+1}; \{\tau_2 \geq n+2\} \cap B] \\
&\leq E[X_{\tau_2}; \{n \leq \tau_2 \leq m\} \cap B] + E[X_m; \{\tau_2 > m\} \cap B] \\
&= E[X_{\tau_2}; \{n \leq \tau_2 \leq m\} \cap B]
\end{aligned}$$

十分大きく m をとれば，$\{n \leq \tau_2 \leq m\} \cap B = B$ であるから $E[X_{\tau_1}; B] \leq E[X_{\tau_2}; B]$.

X_n が一様可積分のとき，$\sup_n E[|X_n|] < \infty$ であることに注意する（付録参照）．$\tau_k = \tau \wedge k$ とおくと，上のことから

$$E[X_0] \leq E[X_{\tau_k}]$$

であるから，

$$E[|X_{\tau_k}|] = 2E[X_{\tau_k}^+] - E[X_{\tau_k}] \leq 2E[X_{\tau_k}^+] - E[X_0]$$

であるが，X_n^+ はまた劣マルチンゲールであることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
E[X_{\tau_k}^+] &= \sum_{j=0}^{k} E[X_j^+; \tau_k = j] + E[X_k^+; \tau > k] \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} E[X_k^+; \tau_k = j] + E[X_k^+; \tau > k] \\
&= E[X_k^+] \leq E[|X_k|] \leq \sup_k E[|X_k|]
\end{aligned}$$

したがって

$$E[|X_{\tau_k}|] \leq 3 \sup_k E[|X_k|]$$

を得るから

$$E[|X_\tau|] \leq 3 \sup_k E[|X_k|]$$

となり，$\tau = \tau_1, \tau_2$ として，X_{τ_i}, $i = 1, 2$ が可積分であることがわかるので，上と同様の証明で $m \to \infty$ とすることにより，各 n に対して

$$E[X_{\tau_2}; A \cap \{\tau_1 = n\}] \geq E[X_{\tau_1}; A \cap \{\tau_1 = n\}], \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$$

がわかるので，題意が示される． ■

【定理 1.5.3（Doob の不等式）】 $\{X_n\}$ を非負劣マルチンゲールとする．このとき，$X_n^* := \max_{0 \leq j \leq n} |X_j|$ とおくと，各 $\epsilon > 0, n \geq 0$ に対して

$$P(X_n^* \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} E[X_n; \{X_n^* \geq \epsilon\}] \leq \frac{1}{\epsilon} E[X_n] \tag{1.10}$$

また

$$E[(X_n^*)^p]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} E[|X_n|^p]^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1 \tag{1.11}$$

である．

証明

$$\tau_n = \begin{cases} \min\{j \leq n; X_j \geq \epsilon\}, & \{\} \neq \emptyset \text{ のとき} \\ n, & \{\} = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく．このとき，τ_n は $\tau_n \leq n$ なる停止時刻なので定理 1.5.1 により，

$$\begin{aligned} E[X_n] &\geq E[X_{\tau_n}] \\ &= E[X_{\tau_n}; \{X_n^* \geq \epsilon\}] + E[X_{\tau_n}; \{X_n^* < \epsilon\}] \\ &\geq \epsilon P(X_n^* \geq \epsilon) + E[X_n; \{X_n^* < \epsilon\}] \end{aligned}$$

したがって

$$\epsilon P(X_n^* \geq \epsilon) \leq E[X_n; \{X_n^* \geq \epsilon\}] \leq E[X_n]$$

より (1.10) が示された．

$E[|X_n^*|^p] < \infty$ とする．

$$\begin{aligned} E[|X_n^*|^p] &= p \int_0^\infty t^{p-1} P(X_n^* \geq t) dt \\ &\leq p \int_0^\infty t^{p-2} E[X_n; \{X_n^* \geq t\}] dt \end{aligned}$$

$$= pE[X_n(\int_0^{X_n^*} t^{p-2}dt)] = \frac{p}{p-1}E[X_n(X_n^*)^{p-1}]$$
$$\leq \frac{p}{p-1}E[|X_n|^p]^{\frac{1}{p}}E[(X_n^*)^p]^{\frac{p-1}{p}}$$

よって，

$$E[(X_n^*)^p]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}E[|X_n|^p]^{\frac{1}{p}}$$

$E[|X_n^*|^p] = \infty$ のとき，上の証明で X_n^* を $X_n^* \wedge K$, K は定数，で置き換えれば

$$E[|X_n^* \wedge K|^p] \leq \frac{p}{p-1}E[X_n(X_n^* \wedge K)^{p-1}] \leq \frac{p}{p-1}E[|X_n|^p]^{\frac{1}{p}}E[(X_n^* \wedge K)^p]^{\frac{p-1}{p}}$$

であるから

$$E[|X_n^* \wedge K|^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_n|^p]$$

$K \to \infty$ として (1.11) を得る．■

さて，次のような停止時刻の列を考えよう． $a < b$ に対して$\tau_0 = 0$, $\tau_{2m-1} = \min\{n > \tau_{2m-2}; X_n \leq a\}$, $\tau_{2m} = \min\{n > \tau_{2m-1}; X_n \geq b\}$, $m = 1, 2, \cdots$, ただし，$\{\} = \emptyset$ のときは $\tau_k = \infty$ と約束する．X_n の $[a, b]$ 上向き横断回数 $U_n(a, b)$ を

$$U_n(a,b) = \begin{cases} 0, & \tau_2 > n \text{ のとき} \\ \max\{m; \tau_{2m} \leq n\}, & \tau_2 \leq n \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する．

【定理 1.5.4（横断数定理）】 $\{X_n\}$ を劣マルチンゲールとするとき，各 n に対して

$$E[U_n(a,b)] \leq \frac{1}{b-a}E[(X_n - a)^+] \tag{1.12}$$

である．

証明　問 1.12 より，$(X_n - a)^+ = (X_n - a) \vee 0$ が劣マルチンゲールになることに注意する．X_n の $[a, b]$ 上向き横断回数は $(X_n - a)^+$ の $[0, b-a]$ 上向き横断回数と等しいので $X_n \geq 0$, $a = 0$ として，

$$E[U_n(0,b)] \leq \frac{1}{b}E[X_n]$$

を示せばよい．

$$\varphi_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \tau_m < i \le \tau_{m+1},\ \exists m\text{: 奇数} \\ 0, & \tau_m < i \le \tau_{m+1},\ \exists m\text{: 偶数} \end{cases}$$

とおくと，$bU_n(0,b) \le \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(X_i - X_{i-1})$ である．また

$$\{\varphi_i = 1\} = \bigcup_{m\text{:奇数}} [\{\tau_m < i\} \cap \{\tau_{m+1} < i\}^c] \in \mathcal{F}_{i-1}$$

である．したがって，$E[X_i|\mathcal{F}_{i-1}] - X_{i-1} \ge 0$ に注意して，

$$\begin{aligned} bE[U_n(0,b)] &\le E[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(X_i - X_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i - X_{i-1}; \{\varphi_i = 1\}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[E[X_i - X_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1}]; \{\varphi_i = 1\}] \\ &\le \sum_{i=1}^{n} E[E[X_i|\mathcal{F}_{i-1}] - X_{i-1}]] \\ &= E[X_n] - E[X_0] \le E[X_n] \end{aligned}$$

■

【定理 1.5.5（マルチンゲールの収束定理）】 $\{X_n\}$ は劣マルチンゲールで

$$\sup_n E[|X_n|] < \infty$$

なるものとする．このとき，$X_\infty \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ があって

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_\infty(\omega) \quad P- \text{ a.s.}$$

さらに，X_n が一様可積分ならば $E[|X_n - X_\infty|] \to 0, n \to \infty$ であり，X_∞ まで込めて劣マルチンゲールとなる．

証明

$$P(\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) > \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)\ ) > 0$$

と仮定しよう．このとき，

$$\{\limsup_{n\to\infty} X_n > \liminf_{n\to\infty} X_n\}$$
$$= \bigcup_{a<b:a,b\in Q_+} \{\limsup_{n\to\infty} X_n > b > a > \liminf_{n\to\infty} X_n\}$$

であるから，ある有理数の組 $a < b$ があって，

$$P(\limsup_{n\to\infty} X_n > b > a > \liminf_{n\to\infty} X_n) > 0$$

このとき定理 1.5.4 より

$$E[U_n(a,b)] \le \frac{1}{b-a} E[(X_n - a)^+] \le \frac{1}{b-a}(E[X_n^+] + |a|)$$

したがって，

$$E[U_\infty(a,b)] = \lim_{n\to\infty} E[U_n(a,b)] \le \frac{1}{b-a}(\sup_n E[X_n^+] + |a|)$$

$\sup_n E[X_n^+] \le \sup_n E[|X_n|] < \infty$ よりこれは矛盾．ゆえに，

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n \equiv X_\infty, \quad P- \text{ a.s.}$$

とおくと，

$$E[|X_\infty|] = E[\lim_{n\to\infty} |X_n|]$$
$$\le \liminf_{n\to\infty} E[|X_n|] \le \sup_n E[|X_n|] < \infty$$

また，X_n が一様可積分ならば，積分論の収束定理（付録参照）により，さらに $\mathbf{L}^1$ で収束していることがわかるので，

$$E[X_\infty|\mathcal{F}_n] = \lim_{m\to\infty} E[X_m|\mathcal{F}_n] \ge X_n$$ ■

! 注意 i) $\{X_n\}_{n\in Z_+}$ が $X_n \le c$, c: 定数， なる劣マルチンゲールならば $c \ge E[X_n] \ge E[X_0]$ なので，定理の仮定を満たし，$\exists \lim_{n\to\infty} X_n \in \mathbf{L}^1$ a.s.. したがって，また $\{X_n\}_{n\in Z_+}$ が下に有界なマルチンゲールならば， $-X_n$ が上に有界な劣マルチンゲールとなるので $\exists \lim_{n\to\infty} X_n \in \mathbf{L}^1$ a.s..

ii) $\{X_n\}_{n\in Z_+}$ を後ろ向き劣マルチンゲールとする．すなわち，$\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$，$n < m$ で，$E[X_n|\mathcal{F}_m] \ge X_m$，$n < m$，$X_n \in \mathbf{L}^1$ とする．このとき，$\inf_n E[X_n] > -\infty$

ならば $\{X_n\}$ は一様可積分であり，したがって $\sup_n E[|X_n|] < \infty$ である．なぜなら，各 $\epsilon > 0$ に対し $E[X_k] - \lim_{n\to\infty} E[X_n] < \epsilon$ を満たす k をとる．$n \geq k$ とすると，

$$
\begin{aligned}
E[|X_n|;|X_n|>c] &= E[X_n;X_n>c] + E[X_n;X_n \geq -c] - E[X_n] \\
&\leq E[X_k;X_n>c] + E[X_k;X_n \geq -c] - E[X_k] + \epsilon \\
&\leq E[|X_k|;|X_n|>c] + \epsilon
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
P(|X_n|>c) &\leq \frac{1}{c}E[|X_n|] = \frac{1}{c}(2E[X_n^+] - E[X_n]) \\
&\leq \frac{1}{c}(2E[X_0^+] - \inf_n E[X_n])
\end{aligned}
$$

より，$c \to \infty$ のとき $\sup_{n\geq k} P(|X_n|>c) \to 0$. よって，

$$
\limsup_{c\to\infty} \sup_{n\geq k} E[|X_n|;|X_n|>c] \leq \limsup_{c\to\infty} \sup_{n\geq k} E[|X_k|;|X_n|>c] + \epsilon = \epsilon
$$

1.6　マルチンゲール：連続時間の場合

さて，以下ではパラメータ空間 $\mathbf{T}$ は区間 $\mathbf{T} \subset [0,\infty)$ であるとする．$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbf{T}}$ が与えられているとする．D を $D \subset \mathbf{T}$ なる可算稠密集合とし，$D = \bigcup_n^\infty D_n$ となる有限集合 D_n, $n = 1, 2, \cdots$, をとる．上記離散マルチンゲールに関する諸定理はパラメータ集合を D_n とした劣マルチンゲールに対して成立している．これを用いて連続パラメータ劣マルチンゲールに結果を拡張しよう．

【定理 1.6.1】 $\{X_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を右連続非負劣マルチンゲールとし，$X_T^* = \sup_{0\leq t\leq T}|X_t|$ とおくと

i) $\lambda^p P(X_T^* \geq \lambda) \leq E[|X_T|^p], \quad p \geq 1$

ii) $E[|X_T^*|^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_T|^p], \quad p > 1$

証明 右辺が有限のときに示せばよい．$T \in D_n, \forall n$ としてよい．$X_n^* = \sup_{t \in D_n} |X_t|$ とおく． X_t は非負劣マルチンゲールであるから， $p \geq 1$ のとき，$|X_t|^p$ も劣マルチンゲール．したがって，定理 1.5.3 により $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda^p P(X_n^* \geq \lambda) = \lambda^p P(|X_n^*|^p \geq \lambda^p) \leq E[|X_T|^p]$$

したがって，

$$\lambda^p P(\sup_{t \in D} |X_t| \geq \lambda) \leq E[|X_T|^p]$$

X_t は右連続だから i) を得る．

同様にして，定理 1.5.3 より

$$E[|X_n^*|^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_T|^p], \quad p > 1$$

だから ii）を得る． ■

! 注意 i) M_t がマルチンゲールのときは，問 1.12 により $|M_t|$ が非負劣マルチンゲールとなり $|M_t|$ に対して上の定理が適用できる．

ii) 離散時間パラメータの場合と違って連続時間パラメータの場合は停止時刻 σ に対して X_σ が $\mathcal{F}_\sigma$ 可測であることは自明でない．$X_\sigma 1_{\{\sigma \leq t\}}$ が $\mathcal{F}_t$ 可測であることをいえばよいが，σ が停止時刻であることから

$$\sigma : \{\omega; \sigma \leq t\} \mapsto [0, t]$$

は $\{\sigma \leq t\} \cap \mathcal{F}_t / \mathcal{B}([0, t])$ 可測である．したがって$\omega \mapsto (\sigma(\omega), \omega)$ は 写像 $\Omega \mapsto [0, t] \times \Omega$ として $\mathcal{F}_t / \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ 可測であり，X_σ は発展的可測過程 $X_s(\omega) : [0, t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega)$ すなわち $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ 可測な写像と$\omega \mapsto (\sigma(\omega), \omega)$ の合成として可測である．

【定理 1.6.2】 $\{X_t\}$ を右連続劣マルチンゲールとする．σ, τ を $\sigma \leq \tau$ なる有界な停止時刻とするとき，

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma$$

である． さらに，X_t が一様可積分のときは，$\sigma \leq \tau < \infty \quad P-\text{a.s.}$ なる任意の停止時刻に対して上がいえる．

証明

$$\sigma_n(\omega) = \frac{k}{2^n}, \quad \frac{k-1}{2^n} \le \sigma < \frac{k}{2^n} \text{ のとき}$$

とおく．τ に対しても同様に τ_n を定義すると明らかに $\sigma_n \le \tau_n$ である．また，σ_n，τ_n は停止時刻になっていることに注意する．このとき，$\sigma_n \ge \sigma_{n+1} \ge \cdots \ge \sigma$ となり，

$$E[X_{\sigma_n}|\mathcal{F}_{\sigma_m}] \ge X_{\sigma_m}, \quad n < m$$

であり，また

$$E[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_{\sigma_n}] \ge X_{\sigma_n} \quad \text{a.s.}$$

したがって，$A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$ に対して，

$$E[X_{\tau_n}; A] \ge E[X_{\sigma_n}; A]$$

X_{σ_n}, X_{τ_n} は後ろ向き劣マルチンゲールで

$$\inf_n E[X_{\sigma_n}] \ge E[X_0] > -\infty$$

X_t の右連続性より，$\lim_{n\to\infty} X_{\sigma_n} = X_\sigma$ であるが，定理 1.5.5 の後の注意により，この収束は $\mathbf{L}^1$ の意味にもなっている．同様に $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = X_\tau \in \mathbf{L}^1(\Omega)$．ゆえに，

$$E[X_\tau; A] \ge E[X_\sigma; A], \quad A \in \mathcal{F}_\sigma \tag{1.13}$$

X_t が一様可積分のときは，定理 1.5.2 の証明と同様に X_τ, X_σ が可積分であることが示されるので，$\sigma \wedge K, \tau \wedge K$, K は定数，に対して (1.13) をいい，その後 $K \to \infty$ とすればよい．■

***!* 注意**　ここでは X_t の右連続性は仮定しているが，$\mathcal{F}_t$ の右連続性は仮定していない．しかしながら，具体的にこの定理を使う場合，停止時刻 σ や τ がたとえば開集合への流入時刻（補題 1.4.6 のもの）に対して使うとき，$\mathcal{F}_t$ の右連続性が必要になる．また $\mathcal{F}_t$ が右連続とすれば X_σ が $\mathcal{F}_\sigma$ 可測となることは，上の定理の証明の中でしたことになっていることを注意しておこう．

問 1.13 $\{B_t\}$ を 1 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とするとき，B_t，B_t^2-t はそれぞれマルチンゲールであることを示せ．

問 1.14 $\{B_t\}$ を 1 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とするとき，$e^{B_t-\frac{1}{2}t}$ はマルチンゲールであることを示せ．

1.7 二 次 変 分

以下ではフィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P;\mathcal{F}_t)$ は $\mathcal{F}_t$ が右連続でありかつ，次の条件 (1.14) を満たしているものとする．

$$\mathcal{N} := \{A\subset\Omega; \exists B\in\mathcal{F} \text{ s.t. } A\subset B, P(B)=0\}\subset\mathcal{F}_0 \tag{1.14}$$

確率過程 $A_t(\omega) : [0,\infty)\times\Omega\mapsto[0,\infty)$ で $\mathcal{F}_t$ に適合して右連続かつ $A_{t_1}\le A_{t_2}<\infty$ a.s. $t_1<t_2$ なるものを増加過程といい，増加過程全体を $\mathcal{A}_+$ で表す．

$$\mathcal{A} := \{A_1-A_2; A_1,A_2\in\mathcal{A}_+\}$$

$$\mathcal{A}_{+,c} := \{A\in\mathcal{A}_+; A_t \text{は連続}\},\quad \mathcal{A}_c := \{A\in\mathcal{A}; A_t \text{は連続}\}$$

とする．また，各 $p\ge 1$ に対して

$$\mathcal{M}_p := \{M=\{M_t\}; M \text{はマルチンゲールで } E[|M_t|^p]<\infty, \forall t\},$$

$$\mathcal{M}_{p,c} := \{M\in\mathcal{M}_p; M_t \text{ は連続}\}$$

とする．

この節では連続な局所マルチンゲール (定義 1.7.5) M に対して，$M^2-\langle M\rangle$ がまた局所マルチンゲールとなる，連続増加過程 $\langle M\rangle\in\mathcal{A}_{+,c}$ が一意的に存在し，その連続増加過程は，局所マルチンゲール M の二次変分という意味をもつことを示すのが目的である．この事実は後に確率積分を定義する基礎となる．またここで展開される解析が，確率積分の基本公式である伊藤の公式の証明において有効に働くことを後にみるであろう．

【補題 1.7.1】 $M=\{M_t\}$ を連続マルチンゲールとする．このとき，$M\in\mathcal{A}$ ならば $M_t=M_0, \forall t$ a.s..

証明　$M_0 = 0$ としてよい．分割

$$\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$$

をとり，$|\Delta| = \max_i |t_{i+1} - t_i|$ とおく．有界なマルチンゲール M_t に対して

$$\begin{aligned}
E[M_t^2] &= E[\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2)] \\
&= E[\sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2] \\
&\le E[\sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \sum_{i=0}^{n-1} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|]
\end{aligned}$$

である．$M_t = A_t^1 - A_t^2 \in \mathcal{A}$ とする．ただし，$A_0^1 = A_0^2 = 0,\ A_t^i \in \mathcal{A}_+,\ i = 1,2$ とする．

$$\tau_k = \begin{cases} \inf\{t; A_t^1 + A_t^2 > k\}, & \{\} \neq \emptyset \text{ のとき} \\ \infty, & \{\} = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

$M_t^k := M_{t\wedge\tau_k}$ とおくと M_t^k は定理 1.6.2 により有界な連続マルチンゲールであるから

$$E[(M_t^k)^2] \le kE[\sup_i |M_{t_{i+1}}^k - M_{t_i}^k|]$$

であり，$\lim_{|\Delta|\to 0} E[\sup_i |M_{t_{i+1}}^k - M_{t_i}^k|] = 0$ となる．したがって，$M_t^k \equiv 0$ a.s. $\forall k$. ゆえに，$M_t \equiv 0$ a.s.. ■

分割

$$\Delta : t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots, \quad t_n < t < t_{n+1}$$

に対して

$$Q_t(M;\Delta) := \sum_{i=0}^{n-1}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_t - M_{t_n})^2, \quad Q_0(M;\Delta) = 0$$

とおく．

1次元ブラウン運動 $\{B_t\}$ に関して，定理 1.2.3 と問 1.13 により $Q_t(B;\Delta) \to t$

in $\mathbf{L}^2(\Omega)$ であり，かつ $B_t^2 - t$ はマルチンゲールであった．このことは $M \in \mathcal{M}_{4,c}$ に対して次のように一般化される．

【定理 1.7.2】 $M \in \mathcal{M}_{4,c}$ とする．このとき，$\langle M \rangle_0 = 0$ なる $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ が存在して $|\Delta| \to 0$ のとき $Q_t(M;\Delta) \to \langle M \rangle_t$ in $\mathbf{L}^2(\Omega), \forall t$ であり，かつ $M^2 - \langle M \rangle$ はマルチンゲールとなる．また，$M^2 - \langle M \rangle$ がマルチンゲールとなるような $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ で $\langle M \rangle_0 = 0$ を満たすものはただ一つである．

この定理の証明のために次の補題を用意する．

【補題 1.7.3】 $M \in \mathcal{M}_{4,c}$ とするとき，

$$E[Q_t(M;\Delta)^2] \le c$$

ここで，c は 分割 Δ によらない定数．

証明 $|M_t| \le K, \exists K > 0$ のときにまず示す．$\Delta : s_0 = 0 < s_1 < \cdots < s_l < t < \cdots$ とする．$s_{l+1} = t$ としておく．

$$\begin{aligned}
Q_t(M;\Delta)^2 &= \{\sum_{k=0}^{l}(M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^2\}^2 \\
&= \sum_{k=0}^{l}(M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 + 2\sum_{j<k}(M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2(M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^2 \\
&= \sum_{k=0}^{l}(M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 + 2\sum_{j}(M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2(Q_t(M;\Delta) - Q_{s_{j+1}}(M;\Delta)) \\
&= \sum_{k=0}^{l}(M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 \\
&\quad + 2\sum_{j}(Q_{s_{j+1}}(M;\Delta) - Q_{s_j}(M;\Delta))(Q_t(M;\Delta) - Q_{s_{j+1}}(M;\Delta))
\end{aligned}$$

であるが

$$E[(Q_{s_{j+1}}(M;\Delta)-Q_{s_j}(M;\Delta))(Q_t(M;\Delta)-Q_{s_{j+1}}(M;\Delta))|\mathcal{F}_{s_{j+1}}]$$
$$=E[(Q_{s_{j+1}}(M;\Delta)-Q_{s_j}(M;\Delta))(M_t-M_{s_{j+1}})^2|\mathcal{F}_{s_{j+1}}]$$

したがって

$$\begin{aligned}E[Q_t(M;\Delta)^2] &= E[\sum_{j=0}^{l}(M_{s_{j+1}}-M_{s_j})^4]\\ &\quad +2\sum_j E[(Q_{s_{j+1}}(M;\Delta)-Q_{s_j}(M;\Delta))(M_t-M_{s_{j+1}})^2]\\ &\le E[(\sup_j|M_{s_{j+1}}-M_{s_j}|^2+2\sup_j|M_t-M_{s_{j+1}}|^2)Q_t(M;\Delta)]\\ &\le 12K^2E[Q_t(M;\Delta)]\end{aligned}$$

マルチンゲール性を使えば

$$E[Q_t(M;\Delta)]=E[M_t^2-M_0^2]\le K^2$$

したがって

$$E[Q_t(M;\Delta)^2]\le 12K^4<\infty$$

一方，上で $\sup_j|M_{s_{j+i}}-M_{s_j}|^2\le 4(M_t^*)^2$ と評価すれば

$$\begin{aligned}E[Q_t(M;\Delta)^2] &\le E[12(M_t^*)^2Q_t(M;\Delta)]\\ &\le E[12^2(M_t^*)^4]^{\frac{1}{2}}E[Q_t(M;\Delta)^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ここで $M_t^*=\sup_{s\le t}|M_t|$. ゆえに定理 1.6.1 と問 1.12 を使って

$$E[Q_t(M;\Delta)^2]\le 12^2E[(M_t^*)^4]\le 12^2(\frac{4}{3})^4E[M_t^4]<\infty$$

一般の $M\in\mathcal{M}_{4,c}$ の場合は $M_t^{(n)}:=M_{\tau_n\wedge t}$, $\tau_n=\inf\{s:|M_s|\ge n\}$ とおいて Fatou の補題を使えばよい. ■

【補題 1.7.4】 $Y_s^{(n)}$ を $\mathcal{F}_t$ に適合した連続確率過程で

$$\lim_{n,m\to\infty} E[\sup_{s\le t}|Y_s^{(n)}-Y_s^{(m)}|^2]=0$$

なるものとする．このとき，ある連続確率過程 Y_s で，$\mathcal{F}_t$ に適合したものがあり，$\{Y_s^{(n)}\}$ の適当な部分列 $\{Y_s^{(n_k)}\}$ をとれば

$$P[\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_k)}-Y_s|\to 0,\ n_k\to\infty]=1$$

であり，かつ

$$\lim_{n_k\to\infty} E[\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_k)}-Y_s|^2]=0$$

となる．

証明　$n_k\ge n_{k-1}$, $E[\sup_{s\le t}|Y_s^{(n)}-Y_s^{(m)}|^2]<\frac{1}{2^{3k}}$, $n,m\ge n_k$ なるようにとる．このとき，

$$\begin{aligned}P[\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_{k+1})}-Y_s^{(n_k)}|>\frac{1}{2^k}]&\le 2^{2k}E[\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_{k+1})}-Y_s^{(n_k)}|^2]\\&\le\frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{\infty}P[\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_{k+1})}-Y_s^{(n_k)}|>\frac{1}{2^k}]<\infty$$

よって，ボレル・カンテリの補題により

$$P[\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\{\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_{k+1})}-Y_s^{(n_k)}|>\frac{1}{2^k}\}]=0$$

すなわち，

$$\Omega_0=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}\{\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_{k+1})}-Y_s^{(n_k)}|\le\frac{1}{2^k}\}$$

とおけば，$P(\Omega_0)=1$ で $\omega\in\Omega_0$ に対してはある m があって，$k\ge m$ に対して

$\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_{k+1})}-Y_s^{(n_k)}|\le\frac{1}{2^k}$ だから $n_j\ge n_i\ge m$ に対して

$$\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_i)}-Y_s^{(n_j)}|\le\sum_{l=i}^{j-1}\frac{1}{2^l}\le\frac{1}{2^{i-1}}$$

より，$Y_s^{(n_k)}$ は $C([0,t])$ のコーシー列となり，ある連続確率過程 Y_s があって $\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_k)}-Y_s|\to 0,\ n_k\to\infty$ また，

$$\begin{aligned}\lim_{n_k\to\infty}E[\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_k)}-Y_s|^2]&=\lim_{n_k\to\infty}E[\lim_{n_j\to\infty}\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_k)}-Y_s^{(n_j)}|^2]\\&\le\lim_{n_k\to\infty}\liminf_{n_j\to\infty}E[\sup_{s\le t}|Y_s^{(n_k)}-Y_s^{(n_j)}|^2]\\&=0\end{aligned}$$

■

定理 1.7.2 の証明　一意性. $M_t^2-A_t$, $M_t^2-\tilde{A}_t$ はともにマルチンゲールで $A,\tilde{A}\in\mathcal{A}_{+,c}$ とすると $A_t-\tilde{A}_t=(M_t^2-\tilde{A}_t)-(M_t^2-A_t)$ はマルチンゲールで $A-\tilde{A}\in\mathcal{A}$. 補題 1.7.1 より $A_t-\tilde{A}_t=A_0-\tilde{A}_0=0,\ \forall t$ a.s..

存在. まず，分割 Δ で $|\Delta|\to 0$ なるものをとるとき，$Q_t(M,\Delta)$ が $\mathbf{L}^2(\Omega)$ でコーシーであることを示す.

$$\Delta:\ t_0=0<t_1<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}<\cdots,\quad t_n<t<t_{n+1}$$

なる分割をとる. $t_k<s<t_{k+1}$ とすると，マルチンゲール性により

$$E[(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})^2|\mathcal{F}_s]=E[(M_{t_{k+1}}-M_s)^2|\mathcal{F}_s]+(M_s-M_{t_k})^2$$

だから

$$\begin{aligned}E[Q_t(M;\Delta)|\mathcal{F}_s]&=\sum_{i=0}^{k-1}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2+(M_s-M_{t_k})^2\\&\quad+E[(M_{t_{k+1}}-M_s)^2+\sum_{k+1}^{n-1}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2+(M_t-M_{t_n})^2|\mathcal{F}_s]\\&=\sum_{i=0}^{k-1}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2+(M_s-M_{t_k})^2+E[M_t^2-M_s^2|\mathcal{F}_s]\end{aligned}$$

したがって

$$E[Q_t(M;\Delta) - Q_s(M;\Delta)|\mathcal{F}_s] = E[M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s] \tag{1.15}$$

となり，$M_t^2 - Q_t(M;\Delta)$ はマルチンゲールであることがわかる．Δ' を別な分割とすれば，$M_t^2 - Q_t(M;\Delta')$ もマルチンゲールだから $L_t := Q_t(M;\Delta) - Q_t(M;\Delta')$ はマルチンゲールであり，また $\mathbf{L}^2(\Omega)$ に属す．よって，(1.15) より

$$E[Q_t(L;\Delta\cup\Delta') - Q_0(L;\Delta\cup\Delta')|\mathcal{F}_0] = E[L_t^2 - L_0^2|\mathcal{F}_0]$$

であるから

$$E[Q_t(Q(M;\Delta) - Q(M;\Delta');\Delta\cup\Delta')] = E[(Q_t(M;\Delta) - Q_t(M;\Delta'))^2]$$

また

$$\begin{aligned}&Q_t(Q(M;\Delta) - Q(M;\Delta');\Delta\cup\Delta')\\&\quad\le 2Q_t(Q(M;\Delta);\Delta\cup\Delta') + 2Q_t(Q(M;\Delta');\Delta\cup\Delta')\end{aligned}$$

に注意する．

$$\Delta\cup\Delta' : s_0 < s_1 < \cdots < s_l < s_{l+1}, \quad s_l \le t < s_{l+1}$$

とし，$t_j \le s_k < s_{k+1} \le t_{j+1}$ とすると

$$\begin{aligned}Q_{s_{k+1}}(M;\Delta) - Q_{s_k}(M;\Delta) &= (M_{s_{k+1}} - M_{t_j})^2 - (M_{s_k} - M_{t_j})^2\\&= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_j})\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}Q_t(Q(M;\Delta);\Delta\cup\Delta') &= \sum_k (Q_{s_{k+1}}(M;\Delta) - Q_{s_k}(M;\Delta))^2\\&\quad + (Q_t(M;\Delta) - Q_{s_l}(M;\Delta))^2\\&= \sum_k (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^2(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_j})^2\\&\quad + (M_t - M_{s_l})^2(M_t + M_{s_l} - 2M_{t_n})^2\end{aligned}$$

したがって

$$Q_t(Q(M;\Delta);\Delta\cup\Delta') \le \sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_j}|^2 Q_t(M;\Delta\cup\Delta')$$

より

$$\begin{aligned}
&E[(Q_t(M;\Delta) - Q_t(M;\Delta'))^2] \\
&\quad \le 2E[Q_t(Q(M;\Delta);\Delta\cup\Delta')] + 2E[Q_t(Q(M;\Delta');\Delta\cup\Delta')] \\
&\quad \le 2E[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_j}|^4]^{\frac{1}{2}} E[Q_t(M;\Delta\cup\Delta')^2]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + 2E[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t'_j}|^4]^{\frac{1}{2}} E[Q_t(M;\Delta\cup\Delta')^2]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ここで，$\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_j}|^4 \le 4^4(M_t^*)^4$ に注意すれば，ルベーグの収束定理により

$$\lim_{|\Delta|,|\Delta'|\to 0} E[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_j}|^4] \to 0$$

であるから，補題 1.7.3 を使って

$$\lim_{|\Delta|,|\Delta'|\to 0} E[(Q_t(M;\Delta) - Q_t(M;\Delta'))^2] \to 0$$

である．

さて，証明を完結させよう．各 $t>0$ に対して，分割の列 Δ_n を $|\Delta_n|\to 0$, $n\to\infty$ なるようにとる．$Q_s(M;\Delta_n) - Q_s(M;\Delta_m)$, $s\le t$ はマルチンゲールなので $|\Delta_n|, |\Delta_m| \to 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
&E[\sup_{s\le t} |Q_s(M;\Delta_n) - Q_s(M;\Delta_m)|^2] \\
&\quad \le 4E[|Q_t(M;\Delta_n) - Q_t(M;\Delta_m)|^2] \to 0
\end{aligned}$$

であり，$Q_t(M;\Delta_n)$ は連続であるから，補題 1.7.4 により連続確率過程 $\langle M\rangle_s \in \mathbf{L}^2$ があって

$$P(|Q_s(M;\Delta_n) - \langle M\rangle_s| \to 0,\ n\to\infty,\ [0,t]\ \text{上一様}) = 1$$

かつ $E[|Q_s(M;\Delta_n) - \langle M\rangle_s|^2] \to 0, \forall s \le t$ となることがわかる．またあらかじめ

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は $[0,t]$ で稠密で $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}, \forall n$ ととっておくことにする.

$$Q_{s_1}(M;\Delta_n) \leq Q_{s_2}(M;\Delta_n), \quad s_1 < s_2,\ s_1, s_2 \in \Delta_n$$

なので $\langle M \rangle_s$ は $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ で単調非減少となるから $\langle M \rangle_s$ は $[0,t]$ で単調非減少. この $\langle M \rangle_s$ は t について整合的にとれていることは明らかだから $\exists \langle M \rangle_s \in \mathcal{A}_{+,c}$ がいえた. $M_t^2 - Q_t(M;\Delta_n)$ がマルチンゲールだから $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ もマルチンゲールである. ■

問 1.15 M を右連続マルチンゲール, τ を停止時刻とし, $M_t^{\tau} = M_{\tau \wedge t}$ とするとき, M^{τ} はマルチンゲールであり, さらに, $M \in \mathcal{M}_{4,c}$ とするとき, $\langle M^{\tau} \rangle_t = \langle M \rangle_{\tau \wedge t}$ となることを示せ.

【定義 1.7.5】 $\mathcal{F}_t$ に適合した右連続確率過程 $\{X_t\}$ に対して $\tau_n \leq \tau_{n+1}, \forall n$, $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ なる （$0 \leq t \leq T$ で考えるときは, $\lim_{n\to\infty} \tau_n = T$ なる）ある停止時刻の列 $\{\tau_n\}$ があって 各 n に対して $\{X_t^{\tau_n}\}$ がマルチンゲールとなるとき $\{X_t\}$ は局所マルチンゲールであるという. 局所マルチンゲール全体の空間を $\mathcal{M}_{loc}$, 連続局所マルチンゲール全体の空間を $\mathcal{M}_{c,loc}$ と表す.

【系 1.7.6】 $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ とするとき,

i) $\langle M \rangle_0 = 0$ なる $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ があって $M^2 - \langle M \rangle$ は連続な局所マルチンゲールとなる. また, このような $\langle M \rangle$ は一意である.

ii) 各 $t > 0$ に対して $[0,t]$ の分割の列 $\{\Delta_n\}$ をとるとき

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0} P(\sup_{s\leq t} |Q_s(M;\Delta_n) - \langle M \rangle_s| > \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon > 0 \tag{1.16}$$

iii) $M_0 = 0$ のとき $M \in \mathcal{M}_{2,c}$ なることは $E[\langle M \rangle_t] < \infty, \forall t$ と同値であり, さらに $E[M_t^2] = E[\langle M \rangle_t]$ である.

証明 i) 仮定より ある停止時刻の列 $\{\tau_n\}$ があって M^{τ_n} はマルチンゲールとなる. $\sigma_n := \inf\{t; |M_t| \geq n\}$ とおくと $\sigma_n \nearrow \infty$ であり, $M^n := M^{\sigma_n \wedge \tau_n}$ は有界マルチンゲールである. したがって, 定理 1.7.2 より $\exists A^n \in \mathcal{A}_{+,c}$ で各 n について

$(M^n)^2-A^n$ はマルチンゲールとなるが $((M^{n+1})^2-A^{n+1})^{\rho_n}=(M^n)^2-(A^{n+1})^{\rho_n}$, $\rho_n=\sigma_n\wedge\tau_n$ でマルチンゲールであるから一意性により $(A^{n+1})^{\rho_n}=A^n$. したがって $\langle M\rangle_t:=\lim_{n\to\infty}A_t^n$, $\forall t>0$ と定義できる.

$$(M_t^{\rho_n})^2-\langle M\rangle_t^{\rho_n}=M_{\rho_n\wedge t}^2-\langle M\rangle_{\rho_n\wedge t}=(M_t^{\rho_n})^2-A_t^n$$

はマルチンゲールであるから i) が示された.

ii) $\rho_n\nearrow\infty$ なので 各 $\delta>0$ に対して $P(\rho_m\le t)<\delta$ となる m があり, M^{ρ_m} は有界マルチンゲールとなる. $Q_s(M;\Delta)=Q_s(M^{\rho_m};\Delta)$, $s\le\rho_m$ だから,

$$\langle M\rangle_s=\langle M^{\rho_n}\rangle_s,\quad s\le\rho_m$$

よって,

$$\begin{aligned}&P(\sup_{0\le s\le t}|Q_s(M;\Delta)-\langle M\rangle_s|>\epsilon)\\&\le P(\rho_m\le t)+P(\sup_{0\le s\le t}|Q_s(M^{\rho_m};\Delta)-\langle M^{\rho_m}\rangle_s|>\epsilon)\end{aligned}$$

より,

$$\limsup_{|\Delta|\to0}P(\sup_{0\le s\le t}|Q_s(M;\Delta)-\langle M\rangle_s|>\epsilon)\le\delta,\quad\forall\delta>0$$

となり ii) が示される.

iii) $M\in\mathcal{M}_{2,c},M_0=0$ とする. $E[(M_t^{\rho_n})^2-\langle M^{\rho_n}\rangle_t]=0$ だから

$$E[\langle M\rangle_t]=\lim_{n\to\infty}E[\langle M^{\rho_n}\rangle_t]=\lim_{n\to\infty}E[(M_t^{\rho_n})^2]\le E[M_t^2]$$

逆に,

$$E[M_t^2]\le\liminf_{n\to\infty}E[(M_t^{\rho_n})^2]=\liminf_{n\to\infty}E[\langle M^{\rho_n}\rangle_t]\le E[\langle M\rangle_t]$$ ■

！注意　この系により, $M\in\mathcal{M}_{2,c}$ に対して $\langle M\rangle\in\mathcal{A}_{+,c},\langle M\rangle_0=0$ で $M_t^2-\langle M\rangle_t$ がマルチンゲールとなるものが一意的に存在することがわかる.

【系 1.7.7】 M,N を連続な局所マルチンゲールとする. このとき $\langle M,N\rangle_0=0$ なる $\langle M,N\rangle\in\mathcal{A}_c$ が一意的に存在して

i)　$MN-\langle M,N\rangle$ は連続な局所マルチンゲール

ii) 各 $t>0$ に対して，$[0,t]$ の分割の列 $\{\Delta_n\}$ をとるとき

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0} P(\sup_{0\le s\le t} |Q_s(M,N;\Delta_n)-\langle M,N\rangle_s| > \epsilon) = 0, \quad \forall\epsilon>0$$

である．ただし，$Q_s(M,N;\Delta) := \sum_{t_{i+1}<s}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})(N_{t_{i+1}}-N_{t_i})+ (M_s-M_{t_n})(N_s-N_{t_n})$，$\Delta : t_0<t_1<\cdots<t_n<\cdots$.

証明 $\langle M,N\rangle = \frac{1}{4}(\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle)$ ととればよい． ■

問 1.16 $(B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ を N 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とするとき $\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{ij}t$ なることを示せ．

交差変分 $\langle M,N\rangle$ が内積の性質をもつことを示す次の命題は以下の議論でしばしば有用となる．

【命題 1.7.8】 M,N,L を連続な局所マルチンゲールとするとき次の i)-iv) が成立する．

i) $\langle M,N\rangle = \langle N,M\rangle$

ii) $\langle M+N,L\rangle = \langle M,L\rangle + \langle N,L\rangle$

iii) 任意の定数 a に対して $\langle aM,N\rangle = a\langle M,N\rangle$

iv) τ を停止時刻とするとき，$\langle M^\tau, N^\tau\rangle_t = \langle M^\tau, N\rangle_t = \langle M,N\rangle_{\tau\wedge t}$

証明 i) $M^2=(-M)^2$ であるから $\langle M\rangle = \langle -M\rangle$ であることが系 1.7.6 よりわかる．したがって，系 1.7.7 を使って i) が示される．

ii) $(M+N)L = ML+NL$ であるから，系 1.7.6 から自明．

iii) M が局所マルチンゲールならば，任意の定数 a に対して aM も局所マルチンゲール．したがって系 1.7.6 より示される．

iv) 系 1.7.7 による． ■

さて，上の定理 1.7.2（またはその系 1.7.6）では 連続な（局所) マルチンゲールに対してその二次変分の存在を直接示したが，通常は Doob-Meyer 分解とよばれる次の定理を用いて示される．すなわち，X_t を二乗可積分なマルチンゲールとすれば，$|X_t|^2$ は劣マルチンゲール（問 1.12）だから，一般に非負劣マルチンゲー

ル Y_t を マルチンゲール M_t と 増加過程 A_t の和

$$Y_t = M_t + A_t \tag{1.17}$$

と分解できれば $Y_t = |X_t|^2$ として対応する増加過程 A_t を X_t の二次変分 $\langle X \rangle_t$ と定義することができる．

ここでは証明なしに Doob-Meyer 分解の定理を掲げておこう．

【定義 1.7.9】 右連続な劣マルチンゲール X_t がクラス (D) に属すとは，$\{X_\sigma; \sigma:$ 有限値停止時刻$\}$ が一様可積分となるときをいい，クラス (DL) に属すとは，任意の $a > 0$ に対して $X_{t\wedge a}$ がクラス (D) に属すときをいう．

【定理 1.7.10】 $\mathcal{F}_t$ が 右連続で (1.14) を満たすとし，$\mathcal{F}_t$ に適合した右連続劣マルチンゲール Y_t がクラス (DL) に属すならば 右連続マルチンゲール M_t と 増加過程 A_t があり，分解式 (1.17) を満たす．ここで A_t は自然増加過程ととれる．さらに，A_t を自然増加過程ととるときこのような分解は一意である．

ここで A_t が自然増加過程であるとは，任意の有界右連続マルチンゲール M_t に対して

$$E\int_{(0,t]} M_s dA_s = E\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s, \quad 0 < \forall t < \infty$$

なるときをいう．

2

確率積分

二乗可積分連続マルチンゲール全体の空間のヒルベルト構造に基づいて確率積分の定義が与えられる．被積分関数としてとることのできる発展的可測確率過程は二乗可積分マルチンゲールMの二次変分連続増加過程$\langle M \rangle$によって規定される．その定義は局所マルチンゲールへと一般化され，伊藤の公式が示される．その公式を使って指数マルチンゲールに関するGirsanovの定理が示される．またこの章で示されるマルチンゲールの表現定理は，数理ファイナンスへの応用において，Burkholder-Davis-Gundyの不等式は確率微分方程式の解の評価において，基本的に重要な役割を果たすことが後に示される．

2.1 確率積分の定義

以下では，フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ は常に $\mathcal{F}_t$ は右連続で，条件 (1.14) を満たしているものとする．

$$\mathcal{M}_2(0,T) := \{M; E[|M_T|^2] < \infty,\ \{M_t\}_{t\in[0,T]} \text{ は右連続マルチンゲール}\}$$

$$\mathcal{M}_{2,c}(0,T) := \{M \in \mathcal{M}_2(0,T);\ \{M_t\}_{t\in[0,T]} \text{ は連続}\}$$

とおく．また，特にσ加法族の増大系$\mathcal{F}_t$を強調する場合には$\mathcal{M}_2(0,T;\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{M}_{2,c}(0,T;\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{M}_{2,c}(\mathcal{F}_t)$, のように表すことにする．

系 1.7.6 によれば，$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ に対して，ある $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ があって，$M_t^2 - \langle M \rangle_t$

はマルチンゲールとなっている．$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ に対して，

$$\mathcal{L}_2(0,T;\langle M\rangle) = \{\varphi; \varphi \text{ は発展的可測で } E[\int_0^T \varphi(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s] < \infty\}$$

$$\mathcal{L}_2(\langle M\rangle) = \{\varphi; \varphi \text{ は発展的可測で } E[\int_0^T \varphi(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s] < \infty,\ \forall T\}$$

とおく．

二乗可積分（連続）マルチンゲール全体の空間のヒルベルト構造に関する次の補題は確率積分の定義において基本的に重要な役割を果たす．

【補題 2.1.1】 i)　$\mathcal{M}_2(0,T)$, $\mathcal{M}_{2,c}(0,T)$ は $\|M\|_T := E[M_T^2]^{\frac{1}{2}}$ をノルムとするヒルベルト空間である．

ii)　$\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_{2,c}$ は $d(M,N) := \sum_{n=0}^\infty \frac{\|M-N\|_n \wedge 1}{2^n}$ を距離とする完備距離空間．

証明　i) 定理 1.6.1 により，

$$E[\sup_{0\le t\le T} |M_t^{(n)} - M_t^{(m)}|^2] \le 4E[|M_T^{(n)} - M_T^{(m)}|^2]$$

だから，$\{M_T^{(n)}\}_n$ を $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ のコーシー列とすれば補題 1.7.4 と同様に，ボレル・カンテリの補題を使って，必要なら部分列をとることにより，ある確率過程 M があって，$n \to \infty$ のとき，確率 1 で $[0,T]$ 上一様に $M_t^{(n)} - M_t \to 0$ となることがわかる．また

$$E[\sup_{0\le t\le T} |M_t^{(n)} - M_t|^2] \to 0,\ n \to \infty$$

であることがわかる．したがって $E[1_A(M_s^{(n)} - M_s)] \to 0$, $E[1_A(M_t^{(n)} - M_t)] \to 0$ であるから，$E[1_A M_t^{(n)}] = E[1_A M_s^{(n)}]$, $\forall A \in \mathcal{F}_s$ なることと合わせて $E[1_A M_t] = E[1_A M_s]$ がわかるから M がマルチンゲールであることがいえる．$E[|M_T^{(n)} - M_T|^2] \to 0$, $n \to \infty$ は上から明らかである．$\|M\|_T$ がヒルベルトノルムになっていることも明らかである．$\mathcal{M}_{2,c}(0,T)$ に対しての証明も同様である．$\mathcal{M}_2(0,T)$ の閉部分空間であることをいってもよい．よって i) を得る．

ii) $\{M^{(n)}\} \subset \mathcal{M}_2$ を $d(M^{(n)} - M^{(m)}, M^{(n)} - M^{(m)}) \to 0,\ n, m \to \infty$ なるものとする．このとき，各 T に対して，$\{M_t^{(n)}\}_{t \leq T}$ は $\mathcal{M}_2(0,T)$ のコーシー列であるから，ある $\{M_t^{(T)}\}_{t \leq T} \in \mathcal{M}_2(0,T)$ があって，$\| M^{(n)} - M^{(T)} \|_T \to 0,\ n \to \infty$ となる．この $M_t^{(T)}$ は T について整合的にとれていることは明らかだから，$M_t = \lim_{T\to\infty} M_t^{(T)}$ と定義でき，$d(M^{(n)} - M, M^{(n)} - M) \to 0,\ n \to \infty$ となる．i) と同様に $\mathcal{M}_{2,c}$ は $\mathcal{M}_2$ の閉部分空間であり，ii) が示される．■

! 注意　$\mathcal{M}_2(0,T), \mathcal{M}_{2,c}(0,T)$ の内積は $E[M_T N_T]$ で与えられる．

$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ が与えられたとき，$\varphi \in \mathcal{L}_2(0,T;\langle M\rangle)$ に対して

$$|\varphi|_T := E[\int_0^T \varphi(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s]^{\frac{1}{2}}$$

とする．また，$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$ に対して

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(|\varphi_1 - \varphi_2|_n \wedge 1)$$

とおく．このとき，次の補題が容易に得られる．

【補題 2.1.2】　i)　$\mathcal{L}_2(0,T;\langle M\rangle)$ は $|\cdot|_T$ をノルムとするヒルベルト空間

ii)　$\mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$ は ρ を距離とする完備な距離空間

証明　i)

$$m(A) = E[\int_0^T 1_A(s,\omega) d\langle M\rangle_s],\ \ A \in \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T$$

で $([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T)$ 上の測度を定義すれば，$\mathbf{L}^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T, dm)$ は $|\cdot|_T$ をノルムとするヒルベルト空間であるから，$\mathcal{L}_2(0,T;\langle M\rangle)$ がその閉部分空間であることに注意すればよい．

ii) i) から従うことは明らかである．■

さて，$\varphi(t,\omega) = \sum_{i=0}^k \xi_i(\omega) 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t);\ 0 = t_0 \leq t_1 < \cdots < t_{k+1}, k = 1, \cdots$ で各 ξ_i は $\mathcal{F}_{t_i}$ 可測で，有界なもの，と表される φ を初等確率過程といい，初等確率過程全体を $\mathcal{L}_0$ と表すことにする．

【補題 2.1.3】 $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$ 内で稠密である．

証明　$\varphi\in\mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$ をとる．ルベーグの収束定理を使うことにより，φ は有界であると仮定してよい．

$$\tilde{\varphi}(s,\omega)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\int_{(s-\frac{1}{n})_+}^{s}\varphi(u,\omega)d\langle M\rangle_u}{\langle M\rangle_s-\langle M\rangle_{(s-\frac{1}{n})_+}}$$
$$\equiv\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(s,\omega)$$

とおく．ただし，$a_+=a\vee 0$. このとき，$d\langle M\rangle$ a.e. s に対して，

$$\exists\lim_{n\to\infty}\varphi_n(s,\omega)=\tilde{\varphi}(s,\omega) \tag{2.1}$$

であり，

$$\int_0^T\tilde{\varphi}(s,\omega)d\langle M\rangle_s=\int_0^T\varphi(s,\omega)d\langle M\rangle_s \tag{2.2}$$

である．また，φ が発展的可測であるから $\varphi_n(s,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$ に適合している．分割 $\Delta:0=t_0<t_1<\cdots<t_k$ に対して，

$$\varphi_n^{(\Delta)}(s,\omega)=\sum_{i=0}^{k}\varphi_n(t_i,\omega)1_{(t_i,t_{i+1}]}(s)$$

とおけば，$\varphi_n^{(\Delta)}\in\mathcal{L}_0$ であり，φ_n が左連続であることから $\lim_{|\Delta|\to 0}\varphi_n^{(\Delta)}(s,\omega)=\varphi_n(s,\omega),\ \forall(s,\omega)$. したがって，

$$E[\int_0^T|\varphi_n^{(\Delta)}(s,\omega)-\varphi_n(s,\omega)|^2d\langle M\rangle_s]\to 0,\quad |\Delta|\to 0$$

また，(2.1) より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T|\varphi_n(s,\omega)-\tilde{\varphi}(s,\omega)|^2d\langle M\rangle_s=0$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}E[\int_0^T|\varphi_n(s,\omega)-\tilde{\varphi}|^2d\langle M\rangle_s]=0$$

よって，(2.2) より補題を得る．　■

二乗可積分連続マルチンゲール M が与えられたとき，まず，初等確率過程に対して確率積分を定義し，近似定理の補題 2.1.3 および，$\mathcal{M}_{2,c}$ と $\mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$ のヒルベルト構造を示す 補題 2.1.1, 2.1.2 を使って $f \in \mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$ に対して，M による確率積分を定義することになる．さて，まず，初等確率過程に対して確率積分の定義を与えよう．

【定義 2.1.4（初等確率過程に対する確率積分）】

$$\varphi(s,\omega) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i(\omega) 1_{(t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{L}_0$$

に対して

$$I(\varphi)(t,\omega) = \sum_{t_{i+1}<t} \xi_i(\omega)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_l(\omega)(M_t - M_{t_l}), \quad t_l \le t < t_{l+1} \tag{2.3}$$

と定義する．また，これを

$$I(\varphi)(t,\omega) = \int_0^t \varphi(s,\omega) dM_s$$

と表す．(2.3) では分点のとり方に注意されたい．すなわち，ξ_i は $\mathcal{F}_{t_i}$ 可測であることに注意する．

このとき，次の補題が得られる．

【補題 2.1.5】 $I(\varphi) \in \mathcal{M}_{2,c}$ であり，

i) $\langle I(\varphi)\rangle_t = \displaystyle\int_0^t \varphi(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s$

ii) $E[I(\varphi)_t^2] = E[\displaystyle\int_0^t \varphi(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s]$

証明　$I(\varphi)(t,\omega)$ がマルチンゲールであるのをみるのはやさしい．そして，明らかに $I(\varphi) \in \mathcal{M}_{2,c}$ である．

i) $t_m \le s < t_{m+1} \le t_l \le t < t_{l+1}$ とする．

$$E[\{I(\varphi)(t,\omega) - I(\varphi)(s,\omega)\}^2 | \mathcal{F}_s]$$

$$= E[\{\sum_{i=m+1}^{l-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_l(M_t - M_{t_l}) + \xi_m(M_{t_{m+1}} - M_s)\}^2|\mathcal{F}_s]$$
$$= \sum_{i=m+1}^{l-1} E[\xi_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2|\mathcal{F}_s] + E[\xi_l^2(M_t - M_{t_l})^2|\mathcal{F}_s]$$
$$+ E[\xi_m^2(M_{t_{m+1}} - M_s)^2|\mathcal{F}_s]$$
$$= \sum_{i=m+1}^{l-1} E[\xi_i^2(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})|\mathcal{F}_s] + E[\xi_l^2(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_l}))|\mathcal{F}_s]$$
$$+ E[\xi_m^2(\langle M\rangle_{t_{m+1}} - \langle M\rangle_s)|\mathcal{F}_s]$$
$$= E[\int_s^t \varphi(r,\omega)^2 d\langle M\rangle_r|\mathcal{F}_s]$$

また,

$$E[\{I(\varphi)(t) - I(\varphi)(s)\}^2|\mathcal{F}_s] = E[I(\varphi)(t)^2 - I(\varphi)(s)^2|\mathcal{F}_s]$$

であるから, $I(\varphi)(t)^2 - \int_0^t \varphi(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s$ はマルチンゲールとなり, 系 1.7.6 により, i) が示された.

ii) は系 1.7.6 よりわかる. ■

【**定義 2.1.6**（**確率積分の定義**）】 さて, 一般の $f \in \mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$ に対して確率積分を定義しよう. 補題 2.1.3 により $f_n \in \mathcal{L}_0$ で

$$\lim_{n\to\infty} E[\int_0^T |f_n(s,\omega) - f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s] = 0, \quad \forall T \tag{2.4}$$

なるものがとれる.

$$X_t^{(n)} = \int_0^t f_n(s,\omega)dM_s$$

とおくと, 補題 2.1.5 を使って, $n, m \to \infty$ のとき,

$$E[|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|^2] = E[\int_0^t |f_n(s) - f_m(s)|^2 d\langle M\rangle_s] \to 0, \quad \forall t$$

また,

$$E[\sup_{s\le t} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|^2] \le 4E[|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|^2]$$

であるから，$\exists X_t^{(n_j)}$, $X_t \in \mathcal{M}_{2,c}$ で $\lim_{n_j\to\infty} d(X^{(n_j)}, X) = 0$ かつ，

$$P(X_t^{(n_j)} \to X_t,\ n_j \to \infty, \text{広義一様}) = 1$$

となる．この $\{X_t\}$ は f_n のとり方によらない．実際，f_n, $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}_0$ で (2.4) を満たすものとし，X_t, $\tilde{X}_t$ を 上のやり方でそれぞれ f_n, $\tilde{f}_n$ から決まるマルチンゲールとすると

$$\begin{aligned} E[\sup_{s\le t}|X_s - \tilde{X}_s|^2] &\le 4E[|X_t - \tilde{X}_t|^2] \\ &= \lim_{n,m\to\infty} 4E[|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|^2] \\ &= \lim_{n,m\to\infty} 4E[\int_0^t |f_n(s) - \tilde{f}_m(s)|^2 d\langle M\rangle_s] = 0,\ \forall t \end{aligned}$$

こうして決まる X_t を f の M による確率積分といい，

$$X_t = \int_0^t f(s,\omega) dM_s$$

と表す．

このとき，次の補題は明らかであろう．

【補題 2.1.7】

$$E[X_T^2] = E[\langle X\rangle_T] = E[\int_0^T f(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s]$$

■ **例 2.1** ■ B_t を原点から出発するブラウン運動とする．$\langle B\rangle_t = t$ であり，また問 1.5 より，自然数 n に対して $E[B_t^{2n}] = c_n t^n$ であったから

$$E[\int_0^T B_t^{2n} dt] < \infty$$

である．したがって $X_t = \int_0^t B_s^n dB_s$ が定義され

$$E[X_T^2] = E[\int_0^T B_t^{2n} dt] = c_n \int_0^T t^n dt = \frac{c_n}{n+1} T^{n+1}$$

2.2　確率積分の特徴づけ

シュワルツの不等式の一般化ともいえる次の不等式は，国田・渡辺の不等式として知られている．

【補題 2.2.1】　$M,\ N \in \mathcal{M}_{2,c}$ とし，$\varphi(s,\omega)$, $\psi(s,\omega)$ は発展的可測で各 $t>0$ に対して $\int_0^t \varphi(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s < \infty$, $\int_0^t \psi(s,\omega)^2 d\langle N\rangle_s < \infty$ とする．このとき，各 t に対し，

$$|\int_0^t \varphi(s,\omega)\psi(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s| \le (\int_0^t \varphi(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t \psi(s,\omega)^2 d\langle N\rangle_s)^{\frac{1}{2}} \text{ a.s.} \tag{2.5}$$

証明　命題 1.7.8 より，

$$\langle M+rN\rangle = \langle M\rangle + 2r\langle M,N\rangle + r^2\langle N\rangle, \quad r \in R$$

したがって，

$$0 \le \int_{s_1}^{s_2} d\langle M+rN\rangle_s = \int_{s_1}^{s_2} d\langle M\rangle_s + 2r\int_{s_1}^{s_2} d\langle M,N\rangle_s + \int_{s_1}^{s_2} r^2 d\langle N\rangle_s \text{ a.s.}$$

がすべての有理数 r に対して成立するようにできるが，右辺は r について連続だから，すべての実数としてよい．よって，

$$|\int_{s_1}^{s_2} d\langle M,N\rangle_s|^2 \le (\int_{s_1}^{s_2} d\langle M\rangle_s)(\int_{s_1}^{s_2} d\langle N\rangle_s)$$

を得るから，$\varphi(s,\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega)1_{(t_i,t_{i+1}]}$, $\psi(s,\omega) = \sum_i \psi_i(\omega)1_{(t_i,t_{i+1}]}$ に対して，

$$\begin{aligned}
|\int_0^t \varphi(s,\omega)\psi(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s| &= |\sum_i \varphi_i(\omega)\psi_i(\omega)\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle M,N\rangle_s| \\
&\le \sum_i |\varphi_i||\psi_i|(\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle M\rangle_s)^{\frac{1}{2}}(\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle N\rangle_s)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (\sum_i |\varphi_i|^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle M\rangle_s)^{\frac{1}{2}}(\sum_i |\psi_i|^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle N\rangle_s)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= (\int_0^t \varphi(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s)^{\frac{1}{2}} (\int_0^t \psi(s,\omega)^2 d\langle N\rangle_s)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a.s.}$$

有界な $\varphi(s,\omega)$, $\psi(s,\omega)$ に対しては，補題 2.1.3 により $\mathcal{L}_0$ の元で近似，一般の φ, ψ に対しては，ルベーグの収束定理を使い，有界なもので近似する．■

確率積分が二乗可積分連続マルチンゲール全体の空間のヒルベルト構造に基づくという関数解析的意味づけが次の形で明確になる．

【定理 2.2.2】 i)　M, $N \in \mathcal{M}_{2,c}$, $f(s,\omega) \in \mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$ のとき，$X_t = \int_0^t f(s,\omega)dM_s$ とすると

$$\langle X, N\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega)d\langle M, N\rangle_s \tag{2.6}$$

であり，かつ任意の $N \in \mathcal{M}_{2,c}$ に対して (2.6) を満たす $X \in \mathcal{M}_{2,c}$ で $X_0 = 0$ なるものは上のものに限る．

ii)　$I(f) = \int_0^T f(s,\omega)dM_s : \mathcal{L}_2(0,T;\langle M\rangle) \mapsto \mathcal{M}_{2,c}(0,T)$ は各 T に対して等距離写像である：

$$E[|X_T|^2] = E[\int_0^T |f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s]$$

証明　i) $f \in \mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$ に対して，$f_n \in \mathcal{L}_0$ で

$$E[\int_0^t |f(s,\omega) - f_n(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s] \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall t$$

なるものをとる． $X_t^{(n)} = \int_0^t f_n(s,\omega)dM_s$ とおくと

$$E[\langle X^{(n)} - X\rangle_t] = E[\int_0^t |f(s,\omega) - f_n(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s] \to 0, \quad n \to \infty$$

補題 2.2.1 を使って

$$\begin{aligned} E[|\langle X^{(n)}, N\rangle_t - \langle X, N\rangle_t|] &\le E[\langle X^{(n)} - X\rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle N\rangle_t^{\frac{1}{2}}] \\ &\le E[\langle X^{(n)} - X\rangle_t]^{\frac{1}{2}} E[\langle N\rangle_t]^{\frac{1}{2}} \to 0 \end{aligned}$$

である．一方

$$|\int_0^t (f(s,\omega)-f_n(s,\omega))d\langle M,N\rangle_s| \le (\int_0^t |f(s,\omega)-f_n(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s)^{\frac{1}{2}}\langle N\rangle_t^{\frac{1}{2}}$$

より

$$E[|\int_0^t f(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s - \int_0^t f_n(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s|] \to 0, \quad n\to\infty$$

また，$\langle X^{(n)},N\rangle_t = \int_0^t f_n(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s$ が補題 2.1.5 i) の証明と同様にしてわかるから $\langle X,N\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s$ a.s. である．一意性は，

$$\langle \tilde{X},N\rangle = \int_0^t f(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s, \quad \forall N\in\mathcal{M}_{2,c}$$

とすると $\langle X-\tilde{X},N\rangle=0$, $\forall N\in\mathcal{M}_{2,c}$ だから $N=X-\tilde{X}$ とおけば $\langle X-\tilde{X}\rangle=0$ a.s.，したがって $X=\tilde{X}$ a.s. と示される．

ii) i) より $X_t=\int_0^t f(s,\omega)dM_s$ とおけば

$$\langle X,X\rangle = \int_0^t f(s,\omega)d\langle M,X\rangle_s = \int_0^t f(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s$$

であるから

$$E[X(t)^2] = E[\langle X\rangle_t] = E[\int_0^t f(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s]$$

■

【系 2.2.3】 i) $M\in\mathcal{M}_{2,c}$, $f,g\in\mathcal{L}_2(\langle M\rangle)$, $a,b\in R^1$ のとき，

$$\int_0^t (af(s,\omega)+bg(s,\omega))dM_s = a\int_0^t f(s,\omega)dM_s + b\int_0^t g(s,\omega)dM_s, \quad \forall t$$

ii) $M,N\in\mathcal{M}_{2,c}$, $f\in\mathcal{L}_2(\langle M\rangle)\cap\mathcal{L}_2(\langle N\rangle)$ のとき，$f\in\mathcal{L}_2(\langle aM+bN\rangle)$ で

$$\int_0^t f(s,\omega)d(aM+bN)_s = a\int_0^t f(s,\omega)dM_s + b\int_0^t f(s,\omega)dN_s, \quad \forall t$$

証明　i) $N \in \mathcal{M}_{2,c}$ のとき，定理 2.2.2 と命題 1.7.8 より

$$\begin{aligned}\langle \int (af+bg)dM, N\rangle &= \int (af+bg)d\langle M,N\rangle \\ &= a\int f\langle M,N\rangle + b\int gd\langle M,N\rangle \\ &= \langle a\int fdM, N\rangle + \langle b\int gdM, N\rangle \\ &= \langle a\int fdM + b\int gdM, N\rangle\end{aligned}$$

なので i) がわかる．

ii) $f \in \mathcal{L}_2(\langle aM+bN\rangle)$ なることは，補題 2.2.1 による．定理 2.2.2 と命題 1.7.8 を使って $L \in \mathcal{M}_{2,c}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \int fd(aM+bN), L\rangle &= \int fd\langle aM+bN, L\rangle \\ &= a\int fd\langle M,L\rangle + b\int fd\langle N,L\rangle \\ &= \langle a\int fdM + b\int fdN, L\rangle\end{aligned}$$

■

2.3　局所マルチンゲールに対する確率積分

【定義 2.3.1（局所マルチンゲールに対する確率積分）】　$M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ をとろう．

この M に対して

$$P[\int_0^T f(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s < \infty] = 1, \quad \forall T$$

となる発展的可測過程 $f(s,\omega)$ に対して確率積分 $\int_0^t f(s,\omega)dM_s$ を定義しよう．このとき $\sigma_n \nearrow \infty$ a.s. なる停止時刻の列があって $M_{t\wedge\sigma_n} \in \mathcal{M}_{2,c}$ となっている．

$$\tau_n(\omega) = n \wedge \inf\{t \geq 0; \int_0^t f(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s \geq n\}$$

とおくとき，$\tau_n \nearrow \infty$ a.s. である．$\rho_n = \tau_n \wedge \sigma_n$ とし，$M_t^{(n)} = M_{t\wedge\rho_n}$，$f^{(n)}(t,\omega) = f(t,\omega)1_{\{\rho_n \geq t\}}$ とおけば，$M_t^{(n)} \in \mathcal{M}_{2,c}$，$f^{(n)} \in \mathcal{L}_2(\langle M^{(n)}\rangle)$ であ

るので $I(f^{(n)})(t,\omega)=\int_0^t f^{(n)}(s,\omega)dM_s^{(n)}$ と定義でき

$$I(f^{(n)})(t,\omega)=I(f^{(m)})(t,\omega), \quad 0\le t\le \rho_n,\ n\le m$$

であることが 定理 2.2.2 と命題 1.7.8 iv) を使ってわかり，$\rho_n\to\infty$, $n\to\infty$ であるから，整合的に $I(f)(t,\omega)=I(f^{(n)})(t,\omega)$,　$0\le t\le\rho_n$ と定義できる．この $I(f)$ を f の M による確率積分という．

問 2.1　$M\in\mathcal{M}_{c,loc}$, $f(s,\omega)$ を $P[\int_0^T f(s,\omega)^2 d\langle M\rangle_s<\infty]=1$, $\forall T$ なる発展的可測過程とする．このとき，$X_t=\int_0^t f(s,\omega)dM_s\in\mathcal{M}_{c,loc}$ は $X_0=0$ で

$$\langle X,N\rangle_t=\int_0^t f(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s \quad \forall t \ \text{a.s.}\ \forall N\in\mathcal{M}_{c,loc}$$

を満たすただ一つの元であることを示せ．

問 2.2　$f(s,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$ に適合して左連続であるとする．このとき，分割 $\Delta: 0=s_0<s_1<\cdots<s_n$ をとれば

$$\int_0^t f(s,\omega)dM_s=P-\lim_{|\Delta|\to 0}\sum f(s_i)(M_{s_{i+1}}-M_{s_i})$$

であることを示せ．ここで $P-\lim$ は確率収束極限の意味である．

2.4　伊 藤 の 公 式

微積分学における合成関数の微分法則（連鎖公式）の確率解析版とされる伊藤の公式を示そう．その応用は極めて広い．証明は以下でみるように，テイラー展開を基本とする確率無限小解析ともいえるもので，1.7 節で行った解析が有効に働く．

【定義 2.4.1】　確率過程 $X=\{X_t\}$ が

$$X_t=X_0+M_t+A_t, \quad M\in\mathcal{M}_{loc},\ A\in\mathcal{A} \tag{2.7}$$

で，X_0 は $\mathcal{F}_0$ 可測確率変数，ただし，$M_0=0$ a.s., $A_0=0$ a.s., と表されるとき，$\{X_t\}$ は半マルチンゲールという．また R^N 値確率過程が半マルチン

ゲールであるとは，各成分が半マルチンゲールのときをいう．さらに，M_t, A_t が連続確率過程であれば，$\{X_t\}$ は連続な半マルチンゲールという．

【定理 2.4.2】 $X_t = (X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^N)$ を連続な半マルチンゲールとする：

$$X_t^i = X_0^i + M_t^i + A_t^i, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.8}$$

$f \in \mathbf{C}^2(R^N)$ のとき，$f(X_t)$ は連続な半マルチンゲールで

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^N \int_0^t D_i f(X_s) dM_s^i + \sum_{i=1}^N \int_0^t D_i f(X_s) dA_s^i \tag{2.9}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t D_{ij} f(X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s$$

ただし，

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad D_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, N.$$

証明

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t > 0; |X_0| > n, \text{ または } |M_t| > n, \text{ または } |A_t| > n\}, & \{\ \} \neq \emptyset \\ \infty, & \{\ \} = \emptyset \end{cases}$$

とおく．このとき，$\tau_n \to \infty$, $n \to \infty$ a.s. であるから $X_{t \wedge \tau_n}$ について (2.9) を示せばよい． したがって X_0, A_t, M_t はすべて有界で f, $D_i f$, $D_{ij} f$ はすべて有界かつ一様連続としてよい．したがって $|f| + \sum_i |D_i f| + \sum_{i,j} |D_{ij} f| \le K$. $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ を $[0, t]$ の分割とする． このとき，テイラーの定理より，

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(X_{t_{k+1}}) - f(X_{t_k})) \\ &= \sum_k \sum_{i=1}^N D_i f(X_{t_k})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i,j=1}^N D_{ij} f(\xi_k)(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \end{aligned}$$

ここで,

$$\xi_k = X_{t_k} + \theta_k(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}), \quad 0 \le \theta_k \le 1$$

右辺第一項は $|\Delta| \to 0$ としたとき，確率積分の定義より,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^t D_i f(X_s) dM_s^i + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t D_i f(X_s) dA_s^i$$

に確率収束する．第二項は,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_k \sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} f(\xi_k)(M_{t_{k+1}}^i - M_{t_k}^i)(M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j) \\
&\quad + \sum_k \sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} f(\xi_k)(M_{t_{k+1}}^i - M_{t_k}^i)(A_{t_{k+1}}^j - A_{t_k}^j) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} f(\xi_k)(A_{t_{k+1}}^i - A_{t_k}^i)(A_{t_{k+1}}^j - A_{t_k}^j) \equiv I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

となるが，ここで，$A = A^+ - A^-$, $A^+, A^- \in \mathcal{A}_{+,c}$ とするとき,

$$|I_2| \le K \sup_k |M_{t_{k+1}} - M_{t_k}|(|A_t^+| + |A_t^-|) \to 0, \ |\Delta| \to 0 \quad \text{a.s.}$$

$$|I_3| \le K \sup_k |A_{t_{k+1}} - A_{t_k}|(|A_t^+| + |A_t^-|) \to 0, \ |\Delta| \to 0 \quad \text{a.s.}$$

より，$I_1 \to \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_0^t D_{ij} f(X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s$　a.s. を示せばよい.

$$I_1' = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} f(X_{t_k})(M_{t_{k+1}}^i - M_{t_k}^i)(M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
|I_1 - I_1'| &\le \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i,j} \sup_l |D_{ij} f(\xi_l) - D_{ij} f(X_{t_l})||M_{t_{k+1}}^i - M_{t_k}^i||M_{t_{k+1}}^j - M_{t_k}^j| \\
&\le \frac{1}{2} \sup_{i,j,l} |D_{ij} f(\xi_l) - D_{ij} f(X_{t_l})| \sum_{n,m} Q_t(M^n; \Delta)^{\frac{1}{2}} Q_t(M^m; \Delta)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

より,

$$
\begin{aligned}
&E[|I_1 - I_1'|] \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{n,m} E[\sup_{i,j,k} |D_{ij}f(\xi_k) - D_{ij}f(X_{t_k})| Q_t(M^n;\Delta)^{\frac{1}{2}} Q_t(M^m;\Delta)^{\frac{1}{2}}] \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{n,m} E[\sup_{i,j,k} |D_{ij}f(\xi_k) - D_{ij}f(X_{t_k})|^2]^{\frac{1}{2}} (E[Q_t(M^n;\Delta) Q_t(M^m;\Delta)])^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{2} E[\sup_{i,j,k} |D_{ij}f(\xi_k) - D_{ij}f(X_{t_k})|^2]^{\frac{1}{2}} (\sum_{n,m} E[Q_t(M^n;\Delta)^2]^{\frac{1}{4}} E[Q_t(M^m;\Delta)^2]^{\frac{1}{4}})
\end{aligned}
$$

であるが, 補題 1.7.3 より 右辺$\to 0$, $|\Delta| \to 0$ である.

$$
I_1'' = \frac{1}{2}\sum_k \sum_{i,j} D_{ij}f(X_{t_k})(\langle M^i, M^j\rangle_{t_{k+1}} - \langle M^i, M^j\rangle_{t_k})
$$

とおくとき,

$$
E[(M^i_{s_2} - M^i_{s_1})(M^j_{s_2} - M^j_{s_1}) - (\langle M^i, M^j\rangle_{s_2} - \langle M^i, M^j\rangle_{s_1}) | \mathcal{F}_{s_1}] = 0
$$

に注意すると,

$$
\begin{aligned}
&E[|I_1' - I_1''|^2] \\
&= \sum_k \frac{1}{4} E[(\sum_{i,j} D_{ij}f(X_{t_k})((M^i_{t_{k+1}} - M^i_{t_k})(M^j_{t_{k+1}} - M^j_{t_k}) \\
&\quad - \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\langle M^i, M^j\rangle_s))^2] \\
&\le \sum_k K^2 E[|M_{t_{k+1}} - M_{t_k}|^4 + \sum_{i,j}(\langle M^i, M^j\rangle_{t_{k+1}} - \langle M^i, M^j\rangle_{t_k})^2] \\
&\le K^2 E[\sup_k |M_{t_{k+1}} - M_{t_k}|^2 \sum_i Q_t(M^i;\Delta)] \\
&\quad + K^2 \sum_{i,j} E[\sup_k |\langle M^i, M^j\rangle_{t_{k+1}} - \langle M^i, M^j\rangle_{t_k}| ((\langle M^i, M^j\rangle_t^+ + \langle M^i, M^j\rangle_t^-)]
\end{aligned}
$$

より，$E[|I_1'-I_1''|^2]\to 0,\ |\Delta|\to 0$. 一方

$$I_1''\to\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t D_{ij}f(X_s)d\langle M^i,M^j\rangle_s,\quad |\Delta|\to 0$$

であるから

$$I_1-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t D_{ij}f(X_s)d\langle M^i,M^j\rangle_s\to 0,\ \text{ in } L^1(\Omega),\ |\Delta|\to 0$$

したがって，(2.9) は 各 t に対して a.s. に等しいが両辺は t について連続であるので 確率 1 ですべての t に対して (2.9) が成立する． ■

■ **例 2.2** ■ B_t を原点から出発する 1 次元ブラウン運動，$X_t=B_t$, $f(x)=x^n$ とするとき，

$$B_t^n=n\int_0^t B_s^{n-1}dB_s+\frac{n(n-1)}{2}\int_0^t B_s^{n-2}ds$$

特に，$n=2$ とすれば，

$$B_t^2=2\int_0^t B_sdB_s+t$$

このことは B_t^2-t がマルチンゲールであることを示している．

■ **例 2.3** ■ $A_t=-\frac{1}{2}t$ とし，$X_t=B_t+A_t$, $f(x)=e^x$ とするとき，

$$e^{B_t-\frac{1}{2}t}=1+\int_0^t e^{B_s-\frac{1}{2}s}dB_s$$

すなわち，$e^{B_t-\frac{1}{2}t}$ が局所マルチンゲールであることがわかるが，実は $E[e^{2B_t-t}]=e^t$ であるから二乗可積分マルチンゲールである．

■ **例 2.4** ■ $B_t=(B_t^1,B_t^2,\cdots,B_t^N)$ を N 次元ブラウン運動，$f(x)=f(x^1,x^2,\cdots,x^N)=((x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^N)^2)^{\frac{m}{2}}$ とするとき，$m\geq 2$ ならば

$$f(B_t)-f(B_0)=m\sum_{i=1}^N\int_0^t B_s^i|B_s|^{m-2}dB_s^i+\frac{1}{2}\int_0^t(Nm+m(m-2))|B_t|^{m-2}ds$$

である．また，$N \geq 3$ で，$m = 2 - N, \sigma_n = \inf\{t; |B_t| \leq \frac{1}{n}\}$ とするとき，

$$f(B_{\sigma_n \wedge t}) - f(B_0) = (2-N)\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\sigma_n \wedge t} B_s^i |B_s|^{-N} dB_s^i$$

であるが，B_t の出発点が原点でないとするとき，すなわち，$P(B_0 = x_0) = 1$, $x_0 \neq 0$ とするとき，実は，$P(\sigma_n \uparrow \infty,\ n \to \infty) = 1$ であるので $f(B_t) - f(B_0)$ は局所マルチンゲールである．

2.5　定　義　再　考

$\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ を連続半マルチンゲールとする：

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad M \in \mathcal{M}_{c,loc},\ A \in \mathcal{A}_c$$
$$Y_t = Y_0 + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t, \quad \tilde{M} \in \mathcal{M}_{c,loc},\ \tilde{A} \in \mathcal{A}_c$$

ここで，X_0, Y_0 は $\mathcal{F}_0$ 可測とする．A_t の全変動を $|A|_t$ と表すとき，

$$\int_0^T |\varphi(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s + \int_0^T |\varphi(s,\omega)| d|A|_s < \infty, \ \ P-\text{ a.s. } \forall T$$

なる発展的可測過程 φ の半マルチンゲール X_t による積分を

$$\int_0^t \varphi(s,\omega)dX_s = \int_0^t \varphi(s,\omega)dM_s + \int_0^t \varphi(s,\omega)dA_s$$

と定義できる．また，半マルチンゲール X_t, Y_t に対して $\langle X,Y\rangle_t = \langle M,\tilde{M}\rangle_t$ と定義すれば，系 1.7.7, 1.7.6 より，分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ をとるとき，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} P(\sup_{0\leq s\leq t} |Q_s(X,Y;\Delta) - \langle X,Y\rangle_s| > \epsilon) = 0, \quad \forall\epsilon > 0$$

となることがわかる．このとき，問 2.2 に注意すれば，

$$\int_0^t X_s dY_s = P - \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

である．ここで，リーマン和をとる際，被積分関数 X_t は左側の分点の値をとっていることに注意しよう．確率積分ではこの値をどこからとるかによって積分の値が異なってくる．このことに注意しておこう．

【定理 2.5.1】

$$P-\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{X_{t_{i+1}}+X_{t_i}}{2}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})=\int_0^t X_s dY_s+\frac{1}{2}\langle X,Y\rangle_t \tag{2.10}$$

$$P-\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}X_{t_{i+1}}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})=\int_0^t X_s dY_s+\langle X,Y\rangle_t \tag{2.11}$$

証明

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{X_{t_{i+1}}+X_{t_i}}{2}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})=\sum_{i=0}^{n-1}X_{t_i}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}X_{t_{i+1}}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})=\sum_{i=0}^{n-1}X_{t_i}(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})+\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})$$

であるから系 1.7.7 よりそれぞれ (2.10),(2.11) が従う．■

***!* 注意**　(2.10) をストラトノヴィッチ積分とよび，$\int_0^t X_s\circ dY_s$ で表す．(2.11) は後ろ向き積分といい，$\int_0^t X_s\hat{d}Y_s$ で表すことにしよう．

■ **例 2.5** ■ 原点から出発する 1 次元ブラウン運動 B_t に対して

$$\begin{aligned}\int_0^t B_s^n\circ dB_s&=\int_0^t B_s^n dB_s+\frac{1}{2}\langle B^n,B\rangle_t\\&=\int_0^t B_s^n dB_s+\frac{n}{2}\int_0^t B_s^{n-1}ds\end{aligned}$$

また

$$\int_0^t B_s^n\hat{d}B_s=\int_0^t B_s^n dB_s+n\int_0^t B_s^{n-1}ds$$

【定理 2.5.2】 $X_t = (X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^N)$ を連続な半マルチンゲールとする：

$$X_t^i = X_0^i + M_t^i + A_t^i, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

$f \in \mathbf{C}^3(R^N)$ とするとき，

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t D_i f(X_s) \circ dX_s^i \tag{2.12}$$

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t D_i f(X_s) \hat{d} X_s^i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t D_{ij} f(X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s \tag{2.13}$$

である．

証明 定義より，

$$\sum_i \int_0^t D_i f(X_s) \circ dX_s^i = \sum_i \int_0^t D_i f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_i \langle D_i f(X), X^i \rangle_t$$

であり，また伊藤の公式より，

$$\begin{aligned} D_i f(X_t) - D_i f(X_0) &= \sum_j \int_0^t D_{ij} f(X_s) dX_s^j + \sum_{j,k} \int_0^t D_{ijk} f(X_s) d\langle X^k, X^j \rangle_s \\ &= \sum_j \int_0^t D_{ij} f(X_s) dM_s^j + \sum_j \int_0^t D_{ij} f(X_s) dA_s^j \\ &\quad + \sum_{j,k} \int_0^t D_{ijk} f(X_s) d\langle X^k, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

したがって，

$$\langle D_i f(X), X^i \rangle_t = \sum_j \int_0^t D_{ij} f(X_s) d\langle M^j, M^i \rangle_s$$

ゆえに，(2.12) を得る．

(2.13) は定理 2.5.1 と上の計算から明らかであろう． ■

***!* 注意**　伊藤の公式 (2.9) を

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t D_i f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t D_{ij} f(X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s$$

と書いておいて (2.12), (2.13) と比較すればその関係がよく理解されるであろう.

2.6　指数型マルチンゲールと Girsanov の定理

以下では, $M_t^1, \cdots, M_t^N \in \mathcal{M}_{c,loc}$ のとき, ベクトル値マルチンゲールに対しても, $M_t = (M_t^1, \cdots, M_t^N) \in \mathcal{M}_{c,loc}$ と表すことにする. 伊藤の公式の一つの応用として次の有用な補題を示しておこう.

【補題 2.6.1】　$f \in \mathbf{C}^{2,1} : R \times [0, \infty) \mapsto C$ が $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ を満たしているとする. このとき, $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ に対して $f(M_t, \langle M \rangle_t) \in \mathcal{M}_{c,loc}$ である.

証明　伊藤の公式を使えば自明であろう. ■

$f(x,t) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} t}$, $\lambda \in C$ として補題 2.6.1 を使えば, 以下の例が得られる.

■ **例 2.6** ■　$B_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ を N 次元ブラウン運動とし, $\xi \in R^N$ とする. $M_t = \xi^* B_t \equiv \sum_{i=1}^N \xi_i B_t^i$ とするとき, $\langle M \rangle_t = |\xi|^2 t$ であるので $f(x,t) = e^{\sqrt{-1}x + \frac{1}{2}t}$ に対して 補題 2.6.1 を用いれば $e^{\sqrt{-1}\xi^* B_t + \frac{|\xi|^2}{2} t}$ は局所マルチンゲール（実はマルチンゲール）となることがわかる. したがって

$$E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)}, \quad s < t$$

である. これはブラウン運動の定義式であった.

■ **例 2.7** ■　$X_t = (X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^N) \in \mathcal{M}_{c,loc}$ が $\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij} t$ を満たしているとする. このとき, X_t は N 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動である. なぜなら, 仮定より, $X_t \in \mathcal{M}_{2,c}$ となり, また $e^{\sqrt{-1}\xi^* X_t + \frac{|\xi|^2}{2} t}$ はマルチンゲールとなる. したがって,

$$E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)}, \quad s < t$$

である．このことは X_t が $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動であることを示している．この事実は Lévy の定理とよばれている．

■ **例 2.8** ■ B_t を 1 次元ブラウン運動とするとき，

$$e^{\int_0^t B_s^n dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t B_s^{2n} ds}$$

は局所マルチンゲールである．

■ **例 2.9** ■ $X_t = (X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^N) \in \mathcal{M}_{c,loc}$ とし，$\varphi_k : [0,\infty) \mapsto R^1, k = 1, 2, \cdots, N$ は有界とする．このとき，

$$e^{\sum_{k=1}^N \int_0^t \varphi_k(s)dX_s^k - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^N \int_0^t \varphi_k(s)\varphi_j(s)d\langle X^k, X^j\rangle_s}$$

は局所マルチンゲールである．

問 2.3 例 2.9 によれば，$X \in \mathcal{M}_{c,loc}, X_0 = 0$ なる X に対して $e(X)_t \equiv e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t}$ は局所マルチンゲールであるが，非負であるので，優マルチンゲールであり，$E[e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t}] \leq 1$ となる．このことを示せ．

さて，上の問で見たように，$e(X)_t = e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t}$ は局所マルチンゲールであるが，これがマルチンゲールとなるための一つの十分条件を掲げておく．

【命題 2.6.2】 $X_t \in \mathcal{M}_{c,loc}, X_0 = 0$ a.s. とする．任意の $t > 0$ に対して

$$P[\langle X\rangle_t \leq c_t] = 1$$

となる定数 c_t があるとき，$e(X)_t$ はマルチンゲールである．

証明 問 2.3 により，$e(X)_t$ は優マルチンゲールで $E[e(X)_t] \leq 1$ であることに注意する．また，ある停止時刻の列 $\{\sigma_n\}$ で $\sigma_n \nearrow \infty$, かつ，$e(X)_{\sigma_n \wedge t}$ がマルチンゲールとなるものがある．

$$\begin{aligned} e(X)_t^2 &= e^{2X_t - \langle X\rangle_t} \\ &= e^{2X_t - \frac{1}{2}\langle 2X\rangle_t} e^{\langle X\rangle_t} \end{aligned}$$

に注意すれば,

$$E[e(X)^2_{\sigma_n\wedge t}] \le e^{c_t}E[e(2X)_{\sigma_n\wedge t}] \le e^{c_t}$$

となり,

$$E[\lambda e(X)_{\sigma_n\wedge t}; e(X)_{\sigma_n\wedge t} \ge \lambda] \le E[e(X)^2_{\sigma_n\wedge t}] \le e^{c_t}$$

したがって, $\sup_n E[e(X)_{\sigma_n\wedge t}; e(X)_{\sigma_n\wedge t} \ge \lambda] \to 0,\ \lambda \to \infty$ となり, $e(X)_{\sigma_n\wedge t}$ が n について一様可積分であることがわかる. ゆえに

$$E[e(X)_t] = \lim_{n\to\infty} E[e(X)_{\sigma_n\wedge t}] = 1$$ ■

さて, $X_0 = 0$ なる $X \in \mathcal{M}_{c,loc}$, に対して $e(X)_t \equiv e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t}$ がマルチンゲールになっている, したがって $E[e(X)_t] = 1$ となっているとする. $T > 0$ を固定し, $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上に確率測度 $\hat{P}$ を

$$\hat{P}(A) = E[e(X)_T; A], \quad A \in \mathcal{F}_T$$

と定義する. このとき, $e(X)_t$ のマルチンゲール性を使うと, $t \le T$ に対して,

$$\hat{P}(A) = E[e(X)_t; A], \quad A \in \mathcal{F}_t$$

となることを注意しておく. フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_T, \hat{P}; \mathcal{F}_t)$ 上で二乗可積分連続マルチンゲールの空間, 連続局所マルチンゲールの空間を 2.1 節のように定義し, それを $\hat{\mathcal{M}}_{2,c}$, $\hat{\mathcal{M}}_{c,loc}$ で表す. また B_t を $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ で定義された N 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動とする. このとき, 次の定理は通常 Girsanov の定理とよばれている. Cameron-Martin-Dynkin-Maruyama-Girsanov の定理とこの定理に関連した仕事で貢献した人を並べてよぶ場合もある.

【定理 2.6.3】 i) $Y \in \mathcal{M}_{c,loc}$, $\hat{Y}(t) = Y(t) - \langle Y, X\rangle(t)$ とおくとき, $\hat{Y} \in \hat{\mathcal{M}}_{c,loc}$ である.

ii) Y_1, $Y_2 \in \mathcal{M}_{c,loc}$ に対し $\hat{Y}_i(t) = Y_i(t) - \langle Y_i, X\rangle(t)$, $i = 1, 2$ と定義すれば $\langle \hat{Y}_1, \hat{Y}_2\rangle = \langle Y_1, Y_2\rangle$.

iii) $(B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ は P のもとで N 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動であるとし, $\hat{B}_t^i = B_t^i - \langle B^i, X\rangle_t$, $i = 1, \cdots, N$ とおくとき, $(\hat{B}_t^1, \hat{B}_t^2, \cdots, \hat{B}_t^N)$ は

$\hat{P}$ のもとで N 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動となる．

証明　i) X, Y, $\langle X\rangle, \langle Y\rangle$ が有界として示せばよい．示すべきことは

$$E[\hat{Y}(t)e(X)_t; A] = E[\hat{Y}(s)e(X)_s; A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s \tag{2.14}$$

である．

$$\begin{aligned}\hat{Y}(t)e(X)_t - \hat{Y}(0) &= (Y(t) - \langle Y, X\rangle_t)e(X)_t - \hat{Y}(0)\\ &= \int_0^t Y(s)de(X)_s + \int_0^t e(X)_s dY_s + \langle Y, e(X)\rangle_t\\ &\quad - \int_0^t \langle Y, X\rangle_s de(X)_s - \int_0^t e(X)_s d\langle Y, X\rangle_s\\ &= \int_0^t Y(s)de(X)_s + \int_0^t e(X)_s dY_s - \int_0^t \langle Y, X\rangle_s de(X)_s\end{aligned}$$

であるから (2.14) が示される．

ii) $E[(\hat{Y}(t)^2 - \langle Y\rangle_t)e(X)_t; A] = E[(\hat{Y}(s)^2 - \langle Y\rangle_s)e(X)_s; A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s, \ s < t$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}\hat{Y}(t)^2 e(X)_t &= (Y(t)^2 - 2\langle Y, X\rangle_t Y(t) + \langle Y, X\rangle_t^2)e(X)_t\\ Y(t)^2 &= Y(0)^2 + 2\int_0^t Y(s)dY(s) + \langle Y\rangle_t\\ -2\langle Y, X\rangle_t Y(t) &= -2\int_0^t \langle Y, X\rangle_s dY_s - 2\int_0^t Y_s d\langle Y, X\rangle_s\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\hat{Y}(t)^2 - \langle Y\rangle_t)e(X)_t &= 2\int_0^t Y(s)d\langle Y, e(X)\rangle_s - 2\int_0^t \langle Y, X\rangle_s d\langle Y, e(X)\rangle_s\\ &\quad -2\int_0^t Y_s e(X)_s d\langle Y, X\rangle_s + 2\int_0^t e(X)_s \langle Y, X\rangle_s d\langle Y, X\rangle_s\\ &\quad +\text{martingale}\\ &= \text{martingale}\end{aligned}$$

となるので ii) が示された．

iii) 仮定より $e(X)$ はマルチンゲールとなっていることに注意しよう．i),ii) より $\hat{B}^i(t)$ は $(\Omega, \mathcal{F}_T, \hat{P}_T; \mathcal{F}_t)$ の下でマルチンゲールとなっており，

$$\langle \hat{B}^i, \hat{B}^j \rangle_t = \delta_{ij} t$$

したがって $\hat{B}_t = (\hat{B}_t^1, \hat{B}_t^2, \cdots, \hat{B}_t^N)$ は $\hat{P}$ のもとで N 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動である． ■

2.7　マルチンゲールの表現定理

$B_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された N 次元ブラウン運動とし，$\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s; s \leq t)$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{N}$ とする．ここで $\mathcal{N}$ は P 零集合全体である．このとき，補題 1.4.10 により，$\mathcal{F}_t$ は 右連続で (1.14) を満たす． この $\mathcal{F}_t$ に対して $\mathcal{M}_2(0,T;\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ を 2.1 節のように定義し，$\mathcal{L}_2(0,T;\langle B \rangle)$, $\mathcal{L}_2(\langle B \rangle)$ も同様に定義する．また，

$$I_2(0,T;B) = \{\xi \in \mathcal{M}_2(0,T;\mathcal{F}_t); \xi_t = \int_0^t X_s dB_s,\ t \leq T,\ X \in \mathcal{L}_2(0,T;\langle B \rangle)\}$$

$$I_2(B) = \{\xi \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t); \xi(t) = \int_0^t X_s dB_s,\ 0 \leq t < \infty,\ X \in \mathcal{L}_2(\langle B \rangle)\}$$

とする．このとき，補題 2.1.1 と 2.1.2 によれば $\mathcal{M}_2(0,T;\mathcal{F}_t)$ は $\|\cdot\|_T$ をノルムとするヒルベルト空間であり，$\mathcal{L}_2(0,T;\langle B \rangle)$ は $|\cdot|_T$ をノルムとするヒルベルト空間である．さらに，写像

$$I_T : X \in \mathcal{L}_2(0,T;\langle B \rangle) \mapsto I_T(X) = \int_0^t X_s dB_s \in \mathcal{M}_2(0,T;\mathcal{F}_t)$$

は等距離的であったから $I_2(0,T;B)$ は $\mathcal{M}_2(0,T;\mathcal{F}_t)$ の閉部分空間である． このとき，次の補題を得る．

【補題 2.7.1】 $N = 1$ とする． 各 $M \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ に対して，次の条件を満たす $H \in I_2(B)$, $K \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ がある．すなわち，$M = H + K$ を満たし，各 $L \in I_2(B)$ に対して $L_t K_t$ はマルチンゲールとなる． さらに，このような分解は一意的である．

証明　一意性．$M = H_1 + K_1 = H_2 + K_2$, $H_i = I(Y_i)$, $Y_i \in \mathcal{L}_2(\langle B \rangle)$, $i = 1, 2$ と題意を満たす分解が二つあったとする．このとき，$K_1 - K_2 = H_2 - H_1 = I(Y_2 - Y_1)$ より，$K_1 - K_2 \in I_2(B)$ であり，かつ $K_1(K_1 - K_2)$, $K_2(K_1 - K_2)$ はマルチンゲールであるから $(K_1 - K_2)^2$ もマルチンゲールである．したがって，$\langle K_1 - K_2 \rangle = 0$ である．よって系 1.7.6 より，$E[(K_1 - K_2)^2(t)] = 0$, $\forall t$. これより，$P(K_1(t) = K_2(t),\ \forall t) = 1$ を得る．

さて，$T > 0$ をとると，$I_2(0, T; B)$ は $\mathcal{M}_2(0, T; \mathcal{F}_t)$ の閉部分空間であったから $M = H + K$, $H \in I_2(0, T; B)$, $K \in I_2(0, T; B)^{\perp}$ と直交分解できる．したがって，この K について，各 $L \in I_2(0, T; B)$ に対して $K_t L_t$ がマルチンゲールとなることを示せばよい．そのためには，各停止時刻 $\sigma \le T$ に対して $E[K_\sigma L_\sigma] = E[K_0 L_0] = 0$ をいえばよい (問 2.4 参照)．$L_T = \int_0^T Y_s dB_s$, $Y \in \mathcal{L}_2(0, T; \langle B \rangle)$ と表せるので，

$$\begin{aligned} E[K_\sigma L_\sigma] &= E[E[K_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] L_\sigma] \\ &= E[E[K_T | \mathcal{F}_\sigma] \int_0^T Y_s 1_{\{s \le \sigma\}} dB_s] \\ &= E[K_T \int_0^T Y_s 1_{\{s \le \sigma\}} dB_s] = 0 \end{aligned}$$

■

問 2.4　M がマルチンゲールであることは，M が可積分で，任意の有界な停止時刻 $\sigma \le \tau$ に対して $E[M_\sigma] = E[M_\tau]$ が成り立つことと同値である．このことを示せ．

さて補題 2.7.1 を基本的に使って示される表現定理を示そう．

【定理 2.7.2】　$B_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ を N 次元ブラウン運動とし，$\mathcal{F}_t^B$, $\mathcal{F}_t$ を上のようにとる．$M \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$, $M_0 = 0$, に対して $X_j \in \mathcal{L}_2(\langle B \rangle)$, $j = 1, 2, \cdots, N$ があり，

$$M_t = \sum_{j=1}^{N} \int_0^t X_j(s) dB_s^j$$

と表される．

この定理を証明するため，次の二つの補題を用意しよう．

【補題 2.7.3】 K は $K \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$, $K_0 = 0$ で 有界かつ，各 $L \in I_2(B)$ に対して K_tL_t がマルチンゲールとなっているとする．このとき $K = 0$ である．

証明 $|K_t| \leq c$ とし，$J = 1 + \frac{K_T}{2c}$ とおくと，$J \geq \frac{1}{2}$ であり $E[J] = 1$ である．$\hat{P}(A) = E[J; A]$,$A \in \mathcal{F}_T$ と定義する．このとき，

$$\hat{E}[e^{\sqrt{-1}\xi(B_t - B_s) + \frac{|\xi|^2}{2}(t-s)}|\mathcal{F}_s] = 1 \quad \text{a.s.} \quad 0 \leq s < t \leq T \tag{2.15}$$

が示されれば $\{B_t\}_{t \leq T}$ は $\hat{P}$ の下でもブラウン運動となり，したがって $P = \hat{P}$ すなわち $K_T = 0$ a.s. である．

$$\begin{aligned}
E[e^{\sqrt{-1}\xi(B_t - B_s) + \frac{|\xi|^2}{2}(t-s)}J; A] &= P(A) + E[\frac{K_T}{2c}; A] \\
&\quad + E[\sqrt{-1}\xi \int_s^t e^{\sqrt{-1}\xi(B_r - B_s) + \frac{|\xi|^2}{2}(r-s)} dB_r (1 + \frac{K_T}{2c}); A] \\
&= P(A) + E[\frac{K_T}{2c}; A] \\
&= E[J; A], \quad A \in \mathcal{F}_s
\end{aligned}$$

より (2.15) が示された．ここで，K_t, $(\int_0^t e^{\sqrt{-1}\xi(B_r - B_s) + \frac{|\xi|^2}{2}(r-s)} dB_r)K_t$ がマルチンゲールであることを使った． ■

【補題 2.7.4】 K_t,L_t がマルチンゲールで K_tL_t もマルチンゲールであるとき，各停止時刻 σ に対して

$$E[K_{t\wedge\sigma}L_t|\mathcal{F}_s] = K_{s\wedge\sigma}L_s \quad \text{a.s. } 0 \leq s < t \tag{2.16}$$

である．

証明 各 $A \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$E[E[K_{t\wedge\sigma}L_t|\mathcal{F}_s]; A \cap \{\sigma \leq s\}] = E[K_{s\wedge\sigma}L_s; A \cap \{\sigma \leq s\}] \tag{2.17}$$

および,

$$E[E[K_{t\wedge\sigma}L_t|\mathcal{F}_s]; A\cap\{\sigma > s\}] = E[K_{s\wedge\sigma}L_s; A\cap\{\sigma > s\}] \tag{2.18}$$

を示せばよい. L のマルチンゲール性を使って

$$\begin{aligned} E[E[K_{t\wedge\sigma}L_t|\mathcal{F}_s]; A\cap\{\sigma \le s\}] &= E[K_{t\wedge\sigma}L_t; A\cap\{\sigma \le s\}] \\ &= E[K_{s\wedge\sigma}(L_t - L_s); A\cap\{\sigma \le s\}] + E[K_{s\wedge\sigma}L_s; A\cap\{\sigma \le s\}] \\ &= E[K_{s\wedge\sigma}L_s; A\cap\{\sigma \le s\}], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s \end{aligned}$$

また, $A\cap\{\sigma > s\} \in \mathcal{F}_{s\wedge\sigma}$, $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$ なることおよび, L のマルチンゲール性, 任意抽出定理を使って,

$$\begin{aligned} E[E[K_{t\wedge\sigma}L_t|\mathcal{F}_s]; A\cap\{\sigma > s\}] &= E[K_{t\wedge\sigma}L_t; A\cap\{\sigma > s\}] \\ &= E[K_{t\wedge\sigma}(L_t - L_{t\wedge\sigma}); A\cap\{\sigma > s\}] + E[K_{t\wedge\sigma}L_{t\wedge\sigma}; A\cap\{\sigma > s\}] \\ &= E[K_{t\wedge\sigma}L_{t\wedge\sigma}; A\cap\{\sigma > s\}] \\ &= E[K_{s\wedge\sigma}L_{s\wedge\sigma}; A\cap\{\sigma > s\}] \\ &= E[K_{s\wedge\sigma}L_s; A\cap\{\sigma > s\}] \end{aligned}$$

■

定理 2.7.2 の証明 $N = 1$ のときに示す. 補題 2.7.1 により, $M = H + K$, $H \in I_2(B)$, $K \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$ と分解でき, K は各 $L \in I_2(B)$ に対して K_tL_t がマルチンゲールとなるものである. $\forall c > 0$ に対して$\sigma = \sigma_c = \inf\{t; |K_t| \ge c\}$ とおくとき, $K_{\sigma\wedge t}$ は有界で 補題 2.7.4 より $K_{\sigma\wedge t}L_t$ がマルチンゲールとなるから補題 2.7.3 より $K = 0$ が従う. ■

! 注意 定理 2.7.2 の設定の下で, M_t が $\mathcal{F}_t$ 局所マルチンゲールのときは,

$$P(\int_0^T |X_j(s)|^2 ds < \infty) = 1, \quad \forall T$$

なる X_j を用いて

$$M_t = \sum_{j=1}^N \int_0^t X_j(s) dB_s^j$$

と表現できる.

次に，ある与えられたフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上で定義された連続な局所マルチンゲール M_t の二次変分が 発展的可測過程 Ψ_{ij} で $\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t \Psi_{ij}(s)ds$, $i,j = 1,2,\cdots,N$ と表されることがわかっているとき，この局所マルチンゲールをあるブラウン運動による確率積分として表す問題を考える．ただし，ここで，$\mathcal{F}_t$ は 必ずしもブラウン運動から生成されたものとは限らない場合である．このような場合，もう一つ確率空間 $(\Omega', \mathcal{F}', P'; \mathcal{F}'_t)$ を用意し，その上の N 次元 $\mathcal{F}'_t$ ブラウン運動 B'_t をとり，$\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t$, $\tilde{P} = P \otimes P'$ とする．$\mathcal{N}$ を $\tilde{\Omega}$ の $\tilde{P}$ 零集合全体とし，

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{G}_s \vee \mathcal{N}), \quad \tilde{\mathcal{F}} = \bigvee_{t \geq 0} \tilde{\mathcal{F}}_t$$

とする．このとき， $X(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して$\tilde{X}(\omega, \omega') = X(\omega)$ とおくとき，

$$\tilde{E}[\tilde{X}(\omega, \omega') | \tilde{\mathcal{F}}_t] = E[X(\omega) | \mathcal{F}_t](\pi(\omega, \omega')), \quad \tilde{P}- \text{ a.s.}$$

であることに注意する．ここで π は射影 $\pi(\omega, \omega') = \omega$ ．したがって，$\mathcal{F}_t$ マルチンゲール $M_t(\omega)$ に対して$\tilde{M}_t(\omega, \omega') = M_t(\omega)$, $\tilde{\Psi}_{ij}(t, \omega, \omega') = \Psi_{ij}(t, \omega)$, また $\tilde{B}_t(\omega, \omega') = B'(t, \omega')$ と定義すれば $\tilde{M}_t$ は $\tilde{\mathcal{F}}_t$ マルチンゲール，$\tilde{B}_t$ は $\tilde{\mathcal{F}}_t$ ブラウン運動，$\tilde{\Psi}_{ij}$ は $\tilde{\mathcal{F}}_t$ 発展的可測となり，

$$\langle \tilde{M}^i, \tilde{M}^j \rangle_t = \int_0^t \tilde{\Psi}_{ij}(s)ds, \quad \langle \tilde{M}^i, \tilde{B}^j \rangle = 0, \quad \langle \tilde{B}^i, \tilde{B}^j \rangle_t = \delta_{ij} t, \quad i,j = 1,2,\cdots,N$$

である．そして，次の定理が成立する．

【定理 2.7.5】 M_t を $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ で定義された連続な局所マルチンゲールでその二次変分が

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t \Psi_{ij}(s, \omega)ds, \quad \Psi_{ij} = \sum_{k=1}^N \psi_{ik}\psi_{jk}, \quad i,j = 1,2,\cdots,N$$

なるものとする．このとき，あるフィルター付き確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ とその上のブラウン運動をとることができ，

$$M_t^i = \sum_{k=1}^N \int_0^t \psi_{ik}(s) d\tilde{B}_s^k$$

と表すことができる．

証明　上記のように，フィルター付き確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ とその上のブラウン運動をとる．また，$\tilde{M}_t$，$\tilde{\Psi}_{ij}$ も同様に定義する．$\Psi = (\Psi_{ij})$ は非負対称行列であるから $\Psi^{\frac{1}{2}}$ が定義できる．$\Psi^{\frac{1}{2}}$ を直交行列で対角化

$$T^* \Psi^{\frac{1}{2}} T = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\frac{1}{2}} & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_r^{\frac{1}{2}} & 0 & & 0 \\ 0 & & & & 0 & & 0 \\ 0 & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

する．そして，R を

$$T^* R T = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-\frac{1}{2}} & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-\frac{1}{2}} & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_r^{-\frac{1}{2}} & 0 & & 0 \\ 0 & & & & 0 & & 0 \\ 0 & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ととるとき，

$$\Psi^{\frac{1}{2}}R = R\Psi^{\frac{1}{2}} = E_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & & & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & & 0 & & 0 \\ 0 & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

でこれは $\Psi^{\frac{1}{2}}$ の像空間への射影である． $E_N = I - E_R$ とおく．ここで I は単位行列．ここで実は，$R(s) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \Psi^{\frac{1}{2}}(s)(\Psi(s)+\epsilon I)^{-1}$ ととれることに注意する．

$\psi = \Psi^{\frac{1}{2}}$ のとき．

$$Z_t^i = \sum_{j=1}^N \int_0^t R_{ij}(s)d\tilde{M}_s^j + \sum_{j=1}^N \int_0^t (E_N)_{ij}d\tilde{B}_s^j$$

ととれば

$$\begin{aligned} \langle Z^i, Z^j\rangle_t &= \sum_{k,l} \int_0^t R_{ik}\Psi_{kl}R_{lj}(s)ds + \int_0^t (E_N)_{ij}(s)ds \\ &= \int_0^t (E_R)_{ij}(s)ds + \int_0^t (E_N)_{ij}(s)ds \\ &= \delta_{ij}t \end{aligned}$$

となり，$Z_t = (Z_t^1, \cdots, Z_t^N)$ は N 次元ブラウン運動であることがわかる．また，$\Psi^{\frac{1}{2}}E_N = E_N\Psi^{\frac{1}{2}} = 0$ に注意すれば

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_0^t \psi_{ij}(s)dZ_s^j &= \sum_{j,k} \int_0^t \psi_{ij}R_{jk}(s)d\tilde{M}_s^k + \sum_{j,k} \int_0^t \psi_{ij}(E_N)_{jk}(s)d\tilde{B}_s^k \\ &= \sum_j \int_0^t (I - E_N)_{ij}(s)d\tilde{M}_s^j \\ &= \tilde{M}_t^i - \sum_j \int_0^t (E_N)_{ij}(s)d\tilde{M}_s^j \\ &= \tilde{M}_t^i = M_t^i \end{aligned}$$

とわかる．ここで

$$\langle \sum_j \int_0^t (E_N)_{ij}(s)d\tilde{M}_s^j, \sum_k \int_0^t (E_N)_{ik}(s)d\tilde{M}_s^k \rangle = \int_0^t E_N \Psi E_N(s)ds = 0$$

なることを使った．

ψ が一般の場合．ある直交行列 U があって $\Psi^{\frac{1}{2}} = \psi U$ と書けるから，上の結果 $M_t^i = \sum_{j=1}^N \int_0^t \Psi_{ij}^{\frac{1}{2}}(s)dZ_s^j$ を使って

$$Y_t^i = \sum_{j=1}^N \int_0^t U_{ij}(s)dZ_s^j$$

とおけば，Y_t はまた N 次元ブラウン運動であって，

$$M_t^i = \sum_{j=1}^N \int_0^t \psi_{ij}(s)dY_s^j$$

と表され，題意が示された． ■

さて，以下では $\mathcal{F}_t$ が右連続で，(1.14) を満たすフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ が与えられており，2.1 節のように，$\mathcal{M}_{2,c}$, $\mathcal{M}_{c,loc}$ が定義されているとする．このとき，マルチンゲールをブラウン運動の時刻変更により表現する次の定理は Dambis-Dubins-Schwarz の定理として知られている．

【定理 2.7.6】 $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ が $\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle(t) = \infty$ a.s. を満たしているとする．$\tau_t = \inf\{s; \langle M\rangle(s) > t\}$ とおき，$\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$ とするとき，$B(t) = M_{\tau_t}$ は $\hat{\mathcal{F}}_t$ ブラウン運動である．したがって，$M_t = B_{\langle M\rangle(t)}$ と表現される．

証明 まず，τ_t は停止時刻である．実際，$\{\tau_t < s\} = \{t < \langle M\rangle(s)\} \in \mathcal{F}_s, \forall s$ であり，$\mathcal{F}_t$ が右連続であるから $\{\tau_t \le s\} \in \mathcal{F}_s$．したがって，各 t に対して，σ 加法族 $\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$ が定義され，明らかに $\hat{\mathcal{F}}_s \subset \hat{\mathcal{F}}_t$, $s < t$ である．また，$\langle M\rangle(t) \to \infty$, $t \to \infty$ より $\tau_t < \infty \; \forall t$ であり，τ_t は $[0, \infty)$ 上で右連続である．上で定義した $B(t)$ が連

続であることをまず示すが，そのためには

$$\{\omega; \langle M\rangle(t_1) = \langle M\rangle(t_2)\} \subset \{\omega; M(t) = M(t_1),\ t_1 \le t \le t_2\} \tag{2.18}$$

を示せばよい．実際，M_t は連続で τ_t は右連続だから M_{τ_t} は右連続，したがって，$t_n \nearrow t$ のとき，$\lim_{n\to\infty} M_{\tau_{t_n}} = M_{\tau_t}$ を示せばよいが，$s = \lim_{n\to\infty} \tau_{t_n}$ とおくと，

$$\langle M\rangle(s) = \lim_{n\to\infty} t_n = t$$

であるから，(2.18) が成り立てば $M_s = M_{\tau_t}$ が得られるからである．

(2.18) を示す．$\sigma = \inf\{s > t_1; \langle M\rangle(s) > \langle M\rangle(t_1)\}$, $N_u = M_{(t_1+u)\wedge\sigma} - M_{t_1}$, $0 \le u < \infty$ とおくと，σ は $\mathcal{F}_t$ 停止時刻であるから，N_u は $\tilde{\mathcal{F}}_u = \mathcal{F}_{(t_1+u)\wedge\sigma}$ について $\mathcal{M}_{c,loc}$ となるが，$\langle N\rangle(u) = \langle M\rangle((t_1+u)\wedge\sigma) - \langle M\rangle(t_1) = 0$ であるから $N_u = 0$. したがって，$M_{(t_1+s)\wedge\sigma} - M_{t_1} = 0$.

さて，証明を完結させよう．$0 \le \forall s_1 < s_2$ をとり，$(\hat{M}_t \equiv M_{t\wedge\tau_{s_2}}, \mathcal{F}_t)$ を考える．$\langle\hat{M}\rangle(t) = \langle M\rangle(t\wedge\tau_{s_2}) \le \langle M\rangle(\tau_{s_2}) = s_2$ であるから，$\hat{M}$, $\hat{M}^2 - \langle\hat{M}\rangle$ は一様可積分，したがって，

$$\begin{aligned}
E[B(s_2) - B(s_1)|\hat{\mathcal{F}}_{s_1}] &= E[\hat{M}(\tau_{s_2}) - \hat{M}(\tau_{s_1})|\mathcal{F}_{\tau_{s_1}}] = 0 \\
E[(B(s_2) - B(s_1))^2|\hat{\mathcal{F}}_{s_1}] &= E[(\hat{M}(\tau_{s_2}) - \hat{M}(\tau_{s_1}))^2|\mathcal{F}_{\tau_{s_1}}] \\
&= E[\langle\hat{M}\rangle(\tau_{s_2}) - \langle\hat{M}\rangle(\tau_{s_1})|\mathcal{F}_{\tau_{s_1}}] \\
&= s_2 - s_1
\end{aligned}$$

より，$B_s \in \mathcal{M}_{2,c}(\hat{\mathcal{F}}_s)$ であり，$\langle B\rangle(s) = s$. ゆえに，Lévy の定理より B_t は $\hat{\mathcal{F}}_t$ ブラウン運動である．■

! 注意　$P(\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t < \infty) > 0$ の場合，$\sigma = \lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t$ とおき，

$$\tau_t = \begin{cases} \inf\{u; \langle M\rangle_u > t\}, & t < \sigma \\ \infty, & t \ge \sigma \end{cases}$$

とおき，

$$\tilde{B}(t) = \lim_{s\uparrow\infty} M_{\tau_t\wedge s},\quad \hat{\mathcal{F}}_t = \bigvee_{s>0} \mathcal{F}_{\tau_t\wedge s}$$

とすると，

$$E[\tilde{B}(t)-\tilde{B}(s)|\hat{\mathcal{F}}_s] \quad = 0$$
$$E[(\tilde{B}(t)-\tilde{B}(s))^2|\hat{\mathcal{F}}_s] = E[\sigma\wedge t-\sigma\wedge s|\hat{\mathcal{F}}_s]$$

となるから，もう一つフィルター付き確率空間 $(\Omega',\mathcal{F}',P';\mathcal{F}'_t)$ と $\mathcal{F}'_t$ ブラウン運動 $\{B'_t\}$ を用意して，

$$\tilde{\Omega}=\Omega\times\Omega',\ \ \tilde{\mathcal{F}}=\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}',\ \ \tilde{P}=P\times P',\ \ \tilde{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{F}'_t$$

とし，

$$B_t=B'_t-B'_{t\wedge\sigma}+\tilde{B}_t$$

とおくと B_t は連続な $\tilde{\mathcal{F}}_t$ マルチンゲールで $\langle B\rangle_t=t$ となるから，同様に定理の結論が得られる．

ここで Novikov の判定条件として知られる命題 2.6.2 の拡張を示しておこう．

【命題 2.7.7】 $X\in\mathcal{M}_{c,loc}$ が

$$E[e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}]<\infty,\quad \forall t$$

を満たすとき，$e(X)_t$ はマルチンゲールとなる．

【補題 2.7.8】 B_t を原点から出発するブラウン運動，

$$\sigma_b=\inf\{t;B_t-t\le b\},\ \ b<0$$

とするとき

$$E[e^{B_{\sigma_b}-\frac{1}{2}\sigma_b}]=1$$

証明 $f(t,x)=e^{-\lambda t-(\sqrt{1+2\lambda}-1)x}$ とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

となることに注意すると，$f(t, B_t - t) - f(0,0)$ は局所マルチンゲールとなるが，$\lambda \geq 0,\ x - t \geq b$ のとき

$$|f(t, x-t)| \leq e^{-(\sqrt{1+2\lambda}-1)b}$$

となるので $f(t \wedge \sigma_b, B_{t\wedge\sigma_b} - t \wedge \sigma_b) - f(0,0)$ は有界マルチンゲールとなり

$$E[f(t \wedge \sigma_b, B_{t\wedge\sigma_b} - t \wedge \sigma_b)] = 1$$

であるから $t \to \infty$ として

$$E[e^{-\lambda\sigma_b - (\sqrt{1+2\lambda}-1)b}] = 1$$

すなわち，

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} P(\sigma_b \in ds) = e^{(\sqrt{1+2\lambda}-1)b}$$

であるから

$$E[e^{\frac{1}{2}\sigma_b}] = e^{-b}$$

が得られ，したがって

$$E[e^{B_{\sigma_b} - \frac{1}{2}\sigma_b}] = e^b E[e^{\frac{1}{2}\sigma_b}] = 1 \qquad \blacksquare$$

命題 2.7.7 の証明　上の定理とその注意により，あるフィルター付き確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ とその上のブラウン運動 B_t があって $X_t = B_{\langle X \rangle_t}$ と表される．

$$Y_t = e^{B_{\sigma_b \wedge t} - \frac{1}{2}\sigma_b \wedge t}$$

とおけば 補題により Y_t は一様可積分 $\tilde{\mathcal{F}}_t$ マルチンゲールであり，したがって

$$E[Y_\sigma] = 1,\ \ \forall\sigma:\ \text{停止時刻}$$

となるが，特に $\langle X \rangle_t$ が停止時刻であることから

$$E[Y_{\langle X \rangle_t}] = 1$$

すなわち，

$$E[e^{B_{\sigma_b} - \frac{1}{2}\sigma_b}; \sigma_b \leq \langle X \rangle_t] + E[e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t}; \sigma_b > \langle X \rangle_t] = 1$$

であるが

$$E[e^{B_{\sigma_b}-\frac{1}{2}\sigma_b}; \sigma_b \leq \langle X\rangle_t] \leq e^b E[e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}] \to 0, \ \ b \to -\infty$$

であるので

$$E[e^{X_t-\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}] = 1$$

を得る．したがって $e(X)_t$ はマルチンゲール． ■

定理 2.7.6 を多次元に拡張した次の定理は Knight の定理とよばれる．

【定理 2.7.9】 $M = (M^1, M^2, \cdots, M^N) \in \mathcal{M}_{c,loc}$, $M_0 = 0$ が $\lim_{t\to\infty}\langle M^k, M^k\rangle(t) = \infty$, $k = 1, 2, \cdots, N$ を満たし，$\langle M^k, M^j\rangle(t) = 0$, $k \neq j$ であるとする．$\tau_t^k = \inf\{s; \langle M^k, M^k\rangle(s) > t\}$ とおき，$B_t^k = M^k_{\tau_t^k}$ とおくと，$B_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ は N 次元ブラウン運動である．

証明　前定理により，各 B_t^k は 1 次元ブラウン運動であるから，$B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N$ の独立性を示せばよい．$f_k(s) : [0, \infty) \mapsto R^1$ をコンパクトな台をもつ可測関数とする．このとき，

$$E[e^{\sqrt{-1}\int_0^t f_k(s)dB_s^k + \frac{1}{2}\int_0^t |f_k(s)|^2 ds}] = 1, \quad k = 1, 2, \cdots, N$$

であり，したがって

$$E[e^{\sqrt{-1}\int_0^\infty f_k(s)dB_s^k + \frac{1}{2}\int_0^\infty |f_k(s)|^2 ds}] = 1, \quad k = 1, 2, \cdots, N$$

また，$L_t = \sum_{k=1}^N \int_0^t f_k(\langle M^k\rangle_s)dM_s^k$ とおくと，

$$\langle L\rangle_t = \sum_{k=1}^N \int_0^t |f_k(\langle M^k\rangle_s)|^2 d\langle M^k\rangle_s \leq \sum_{k=1}^N \int_0^\infty |f_k(s)|^2 ds \leq c$$

であるから

$$E[e^{\sqrt{-1}L_t + \frac{1}{2}\langle L\rangle_t}] = 1$$

であり，また

$$E[e^{\sqrt{-1}L_\infty + \frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty}] = 1$$

である．$L_\infty = \sum_k \int_0^\infty f_k(s)dB_s^k$, $\langle L\rangle_\infty = \sum_k \int_0^\infty |f_k(s)|^2 ds$ に注意すれば

$$E[e^{\sqrt{-1}\sum_k \int_0^\infty f_k(s)dB_s^k + \frac{1}{2}\sum_k \int_0^\infty |f_k(s)|^2 ds}]$$
$$= \prod_{k=1}^N E[e^{\sqrt{-1}\int_0^\infty f_k(s)dB_s^k + \frac{1}{2}\int_0^\infty |f_k(s)|^2 ds}]$$

すなわち，

$$E[e^{\sqrt{-1}\sum_k \int_0^\infty f_k(s)dB_s^k}] = \prod_{k=1}^N E[e^{\sqrt{-1}\int_0^\infty f_k(s)dB_s^k}]$$

より，$B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N$ の独立性を得る． ■

2.8　Burkholder-Davis-Gundy の不等式

マルチンゲールの絶対値の最大値のモーメントと二次変分のモーメントの間の関係に関する次の不等式は極めて有用である．以下の巧妙な証明は Getoor-Sharpe によるものとして知られている．

【定理 2.8.1】 $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ で $M_0 = 0$ とする．任意の $0 < p < \infty$ に対して $c_1 = c_1(p)$, $c_2 = c_2(p)$ があって

$$c_1 E[(M_t^*)^{2p}] \le E[\langle M, M\rangle_t^p] \le c_2 E[(M_t^*)^{2p}] \tag{2.20}$$

ここで，$M_t^* = \sup_{0\le s\le t} |M_s|$.

証明　M が有界な場合にまず証明する．

$p = 1$ のとき，

$$E[\langle M, M\rangle] = E[M_t^2] \le E[(M_t^*)^2]$$

$$E[(M_t^*)^2] \le 4E[M_t^2]$$

より，$c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = 1$ で (2.20) が成立．

$p > 1$ のとき，マルチンゲール不等式（定理 1.6.1）より

$$E[(M_t^*)^{2p}] \le (\frac{2p}{2p-1})^{2p} E[|M_t|^{2p}]$$

また，伊藤の公式より，

$$|M_t|^{2p} = 2p\int_0^t |M_s|^{2p-1}\mathrm{sgn}(M_s)dM_s + p(2p-1)\int_0^t |M_s|^{2p-2}d\langle M\rangle_s$$

であるから，

$$\begin{aligned} E[|M_t|^{2p}] &= p(2p-1)E[\int_0^t |M_s|^{2p-2}d\langle M\rangle_s] \\ &\le p(2p-1)E[(M_t^*)^{2p-2}\langle M\rangle_t] \\ &\le p(2p-1)E[(M_t^*)^{2p}]^{\frac{p-1}{p}}E[\langle M\rangle_t^p]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

したがって，

$$E[(M_t^*)^{2p}]^{\frac{1}{p}} \le \frac{2^{2p}p^{2p+1}}{(2p-1)^{2p-1}}E[\langle M\rangle_t^p]^{\frac{1}{p}}$$

一方， $N_t := \int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{p-1}{2}}dM_s$ とおくと，

$$p\langle N\rangle_t = p\int_0^t \langle M\rangle_s^{p-1}d\langle M\rangle_s = \langle M\rangle_t^p$$

より，

$$E[\langle M\rangle_t^p] = pE[\langle N\rangle_t]$$

したがって，伊藤の公式により，

$$\begin{aligned} M_t\langle M\rangle_t^{\frac{p-1}{2}} &= \int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{p-1}{2}}dM_s + \int_0^t M_s d\langle M\rangle_s^{\frac{p-1}{2}} \\ &= N_t + \int_0^t M_s d\langle M\rangle_s^{\frac{p-1}{2}} \end{aligned}$$

よって，

$$|N_t| \le M_t^*\langle M\rangle_t^{\frac{p-1}{2}} + M_t^*\langle M\rangle_t^{\frac{p-1}{2}} = 2M_t^*\langle M\rangle_t^{\frac{p-1}{2}}$$

から，

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}E[\langle M\rangle_t^p] &= E[\langle N\rangle_t] \\ &\le 4E[(M_t^*)^2\langle M\rangle_t^{p-1}] \\ &\le 4E[(M_t^*)^{2p}]^{\frac{1}{p}}E[\langle M\rangle_t^p]^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

したがって，

$$E[\langle M\rangle_t^p] \le (4p)^p E[(M_t^*)^{2p}]$$

$0<p<1$ のとき，$N_t=\int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{p-1}{2}} dM_s$ とおく．このとき，上と同様にして $E[\langle M\rangle_t^p]=pE[N_t^2]$ で $M_t=\int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{1-p}{2}} dN_s$ であるから，

$$\begin{aligned} N_t\langle M\rangle_t^{\frac{1-p}{2}} &= \int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{1-p}{2}} dN_s + \int_0^t N_s d\langle M\rangle_s^{\frac{1-p}{2}} \\ &= M_t + \int_0^t N_s d\langle M\rangle_s^{\frac{1-p}{2}} \end{aligned}$$

よって，

$$|M_t| \le 2N_t^*\langle M\rangle_t^{\frac{1-p}{2}}$$

から $M_t^* \le 2N_t^*\langle M\rangle_t^{\frac{1-p}{2}}$，したがって，

$$\begin{aligned} E[(M_t^*)^{2p}] &\le 2^{2p}E[(N_t^*)^{2p}\langle M\rangle_t^{p(1-p)}] \\ &\le 2^{2p}E[(N_t^*)^2]^p E[\langle M\rangle_t^p]^{1-p} \\ &\le 2^{2p}4^p E[N_t^2]^p E[\langle M\rangle_t^p]^{1-p} \\ &= (\frac{16}{p})^p E[\langle M\rangle_t^p] \end{aligned}$$

逆の不等式を示すために，$\alpha>0$ とし，

$$\langle M\rangle_t^p = \langle M\rangle_t^p(\alpha+M_t^*)^{-2p(1-p)}(\alpha+M_t^*)^{2p(1-p)}$$

にヘルダーの不等式を用いて，

$$E[\langle M\rangle_t^p] \le E[\langle M\rangle_t(\alpha+M_t^*)^{-2(1-p)}]^p E[(\alpha+M_t^*)^{2p}]^{1-p}$$

$N_t=\int_0^t(\alpha+M_s^*)^{p-1}dM_s$ とおくと，

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t (\alpha+M_s^*)^{2(p-1)} d\langle M\rangle_s \ge \langle M\rangle_t(\alpha+M_t^*)^{2(p-1)}$$

であり，伊藤の公式により，

$$M_t(\alpha+M_t^*)^{p-1} = \int_0^t (\alpha+M_s^*)^{p-1}dM_s + \int_0^t M_s d(\alpha+M_s^*)^{p-1}$$

$$= N_t + (p-1)\int_0^t M_s(\alpha + M_s^*)^{p-2} dM_s^*$$

よって，

$$|N_t| \leq (M_t^*)^p + (1-p)\int_0^t (M_s^*)^{p-1} dM_s^* = \frac{1}{p}(M_t^*)^p$$

から $E[N_t^2] \leq \frac{1}{p^2}E[(M_t^*)^{2p}]$. したがって，

$$E[\langle M\rangle_t^p] \leq p^{-2p}E[(M_t^*)^{2p}]^p E[(\alpha + M_t^*)^{2p}]^{1-p}, \quad \forall\alpha > 0$$

$\alpha \to 0$ として，

$$E[\langle M\rangle_t^p] \leq p^{-2p}E[(M_t^*)^{2p}].$$

一般の場合.

$$\sigma_n = \begin{cases} \inf\{t; |M_t| \geq n, \text{ または } \langle M\rangle_t \geq n\}, & \{\} \neq \emptyset \text{ のとき} \\ \infty, & \{\} = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくと，$\sigma_n \to \infty$, $n \to \infty$ であるが，$M^{\sigma_n} = M_{\sigma_n \wedge \cdot}$ は有界であり，$\langle M^{\sigma_n}\rangle_t = \langle M\rangle_{\sigma\wedge t}$ であるから，上の結果より

$$c_1 E[(M_{t\wedge\sigma_n}^*)^{2p}] \leq E[\langle M\rangle_{\sigma_n\wedge t}\rangle^p] \leq c_2 E[(M_{t\wedge\sigma_n}^*)^{2p}]$$

c_1, c_2 は n によらなかったので $n \to \infty$ として定理の結論を得る. ■

3

確率微分方程式

ランダムな係数をもつ確率微分方程式を定式化し，解の存在および一意性，モーメント評価に関する基本的な結果を述べる．係数をランダムなものにしたことは，第 5 章で確率制御問題を論じる際に生かされる．さらに，係数が一次関数の場合の具体的な計算を紹介した後，確率的流れ，弱い解の概念，マルチンゲール問題，絶対連続性等，基本的な事項を解説する．マルコフ型の場合は，拡散過程として，第 4 章および第 6 章で解析学との関係を詳しく考察する．

3.1 解の概念

$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ をフィルター付き確率空間とし，$\mathcal{F}_t$ は右連続で (1.14) を満たしているものとする．そしてその上で定義された $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動 B_t が与えられているものとする．また

$$\sigma = \sigma(t, x, \omega) : [0, T] \times R^N \times \Omega \mapsto R^N \otimes R^m$$
$$b = b(t, x, \omega) : [0, T] \times R^N \times \Omega \mapsto R^N$$

が与えられており，それらは $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(R^N) \otimes \mathcal{F}_T$ 可測で，さらに各 x に対して $\mathcal{F}_t$ 発展的可測とする．また，$\mathcal{F}_0$ 可測な R^N 値確率変数 $\xi(\omega)$ が与えられているとする．このとき，次の確率微分方程式を考える．

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s, \omega) dB_s + \int_0^t b(s, X_s, \omega) ds \tag{3.1}$$

これは，各成分で表すと，

$$X_t^i(\omega) = \xi^i(\omega) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_j^i(s, X_s(\omega), \omega) dB_s^j + \int_0^t b^i(s, X_s(\omega), \omega) ds \tag{3.2}$$

$i = 1, \cdots, N$ である．

【定義 3.1.1】 $X_t(\omega) : [0,T] \times \Omega \mapsto R^N$ が (3.1) の解であるというのは，

i) $X = \{X_t(\omega)\}_{t \leq T}$ は $\mathcal{F}_t$ に適合した連続確率過程であり，$\sigma(t, X_t(\omega), \omega)$, $b(t, X_t(\omega), \omega)$ は発展的可測で，

$$P(\int_0^T \{\| \sigma(t, X_t, \omega) \|^2 + |b(t, X_t, \omega)|\} dt < \infty) = 1$$

ただし，$\| \sigma \|^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^N |\sigma_j^i|^2 \equiv \mathrm{tr}(\sigma\sigma^*)$ である．

ii) $X_t(\omega) = \xi(\omega) + \int_0^t \sigma(s, X_s(\omega), \omega) dB_s + \int_0^t b(s, X_s(\omega), \omega) ds$, $\forall t \leq T$ が確率 1 で成り立っている．

! **注意**　σ, b が ω によらず，(t, x) だけの関数の場合を考えることも多い．この場合 (3.1) はマルコフ型とよばれる．

3.2　解の存在と一意性，モーメント評価

前節で与えられた σ, b, ξ に対し次の条件を仮定する．

$$\begin{cases} \| \sigma(t,x,\omega) - \sigma(t,y,\omega) \| \leq K|x-y|, \\ |b(t,x,\omega) - b(t,y,\omega)| \quad \leq K|x-y| \end{cases} \tag{3.3}$$

$$E[|\xi|^2 + \int_0^T \{\| \sigma(s,0,\omega) \|^2 + |b(s,0,\omega)|^2\} ds] = M < \infty \tag{3.4}$$

【定理 3.2.1】 リプシッツ条件 (3.3) および (3.4) の下で，確率微分方程式 (3.1) は一意解 $X = \{X_t\}_{t \leq T}$ をもち，

$$E[\sup_{0\le t\le T}|X_t|^2] \le ce^{cT}, \quad c=c(T,K,M) \tag{3.5}$$

を満たす．ここで，一意性は次の意味である．$X, \tilde{X}$ を (3.1) の解とするとき，

$$P(\sup_{0\le s\le T}|X_s-\tilde{X}_s|>0)=0 \tag{3.6}$$

証明　$\mathbf{H}_T^2$ を $\mathcal{F}_t$ に適合した連続確率過程 X で $E[\sup_{0\le t\le T}|X_t|^2]<\infty$ を満たすもの全体を表すことにし，$|[X]|_t^2 = E[\sup_{0\le s\le t}|X_s|^2]$ とおく．$X\in\mathbf{H}_T^2$ に対して，

$$GX(t)=\xi+\int_0^t \sigma(s,X_s,\omega)dB_s+\int_0^t b(s,X_s,\omega)ds \tag{3.7}$$

とおくとき，$GX\in\mathbf{H}_T^2$ であり，

$$|[GX-GY]|_t^2 \le c\int_0^t |[X-Y]|_s^2 ds, \quad \forall t\le T,\ c=c(T,K) \tag{3.8}$$

実際，定義から GX は $\mathcal{F}_t$ に適合した連続確率過程であり，$GX\in\mathbf{H}_T^2$ となることは，次のようにしてわかる．

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le T}|GX(s)|^2\\
&\quad\le 3(|\xi|^2+\sup_{0\le s\le T}|\int_0^s \sigma(r,X_r,\omega)dB_r|^2+\sup_{0\le s\le T}|\int_0^s b(r,X_r,\omega)dr|^2)
\end{aligned}$$

からマルチンゲール不等式 (定理 1.6.1) と (3.3) を使えば，

$$\begin{aligned}
&E[\sup_{0\le s\le T}|GX(s)|^2]\\
&\quad\le 3E[|\xi|^2]+12E[\int_0^T \|\sigma(s,X_s,\omega)\|^2 ds]+3TE[\int_0^T |b(s,X_s,\omega)|^2 ds]\\
&\quad\le 3E[|\xi|^2]+24E[\int_0^T \|\sigma(s,0,\omega)\|^2 ds]+6TE[\int_0^T |b(s,0,\omega)|^2 ds]\\
&\qquad+(24K^2+6TK^2)E[\int_0^T |X_s|^2 ds]
\end{aligned}$$

であるから (3.4) を使って $GX \in \mathbf{H}_T^2$ となる．また同様にして，

$$\begin{aligned}
&E[\sup_{0\le s\le t}|GX(s)-GY(s)|^2]\\
&\le 8E[\int_0^t \| \sigma(s,X_s,\omega)-\sigma(s,Y_s,\omega)\|^2\,ds]\\
&\quad + 2TE[\int_0^t |b(s,X_s,\omega)-b(s,Y_s,\omega)|^2 ds]\\
&\le 2K^2(4+T)E[\int_0^t |X_s-Y_s|^2 ds]\\
&\le 2K^2(4+T)\int_0^t E[\sup_{0\le r\le s}|X_r-Y_r|^2]ds
\end{aligned}$$

より，$c=2K^2(4+T)$ として (3.8) が従う．

さて，解の存在を示そう．

$$X_t^{(0)}\equiv\xi,\ X_t^{(n+1)}=GX^{(n)}(t),\ n=0,1,\cdots$$

とおく．$X^{(0)}\in\mathbf{H}_T^2$ は明らかであるから，上でみたことより，$X^{(n)}\in\mathbf{H}_T^2, \forall n$ である．したがって，(3.8) より，

$$\begin{aligned}
\|[X^{(n+1)}-X^{(n)}]\|_T^2 &\le c\int_0^T \|[X^{(n)}-X^{(n-1)}]\|_{s_1}^2 ds_1\\
&\le c^n\int_0^T\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-1}}\|[X^{(1)}-X^{(0)}]\|_{s_n}^2 ds_n ds_{n-1}\cdots ds_1\\
&\le \frac{(cT)^n}{n!}c_1
\end{aligned} \tag{3.9}$$

したがって，チェビシェフの不等式により，

$$\begin{aligned}
P(\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|>\frac{1}{2^n}) &\le 2^{2n}E[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|^2]\\
&\le \frac{(4cT)^n}{n!}c_1
\end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|>\frac{1}{2^n})<\infty$$

ボレル・カンテリの補題より，

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(k+1)}-X_t^{(k)}|>\frac{1}{2^k}\}\right)=0$$

となるので，$X_t^{(n)}$ は 確率 1 で $[0,T]$ 上一様収束する．その極限を $X_t(\omega)$ とする．一方，(3.9) より，$\|[X^{(n)}]\|_T^2\le c_2e^{2cT}$, $c_2=c(K,M,T)$ であるから，

$$\|[X]\|_T^2\le\liminf_{n\to\infty}\|[X^{(n)}]\|_T^2\le c_2e^{2cT} \tag{3.10}$$

であり，また $\|[X^{(n)}-X]\|_T^2\to 0,\ n\to\infty$ である．したがって，(3.8) を使って

$$\|[X-GX]\|_T=\lim_{n\to\infty}\|[X^{(n)}-GX^{(n)}]\|_T=\lim_{n\to\infty}\|[X^{(n)}-X^{(n+1)}]\|_T=0$$

より，$X=GX$ すなわち，X は (3.1) の解である．(3.5) は (3.10) で示した．一意性は次の定理の証明の中で示す． ■

【系 3.2.2】 マルコフ型のとき，すなわち $\sigma=\sigma(t,x)$, $b=b(t,x)$ のとき，(3.3) と

$$\int_0^T\{\|\sigma(s,0)\|^2+|b(s,0)|^2\}ds<\infty,\quad E[|\xi|^2]<\infty \tag*{(3.4)$'$}$$

を仮定するとき，確率微分方程式 (3.1) は一意解 $X=\{X_t\}_{t\le T}$ をもち，その解は (3.5) を満たす．特に，σ, b が時間 s によらないときは，(3.3) と

$$E[|\xi|^2]<\infty \tag*{(3.4)$''$}$$

を仮定するとき，一意解の存在がいえる．

(3.3) を局所リプシッツ条件に弱めて，定理を拡張しておこう．

各 $R>0$ に対して，定数 K_R が存在し，

$$\begin{cases}\|\sigma(t,x,\omega)-\sigma(t,y,\omega)\|\le K_R|x-y|, & x,y\in B_R\\ |b(t,x,\omega)-b(t,y,\omega)|\le K_R|x-y|, & x,y\in B_R\end{cases} \tag{3.11}$$

を仮定する．ただし，$B_R = \{x \in R^N; |x| \le R\}$ である．さらに，

$$\frac{1}{2} \parallel \sigma(t,x,\omega) \parallel^2 + x^* b(t,x,\omega) \le K(r(t,\omega)^2 + |x|^2) \tag{3.12}$$

を仮定する．ここで，$r(t,\omega)$ は発展的可測で，

$$E[|\xi(\omega)|^2 + \int_0^T \{|b(s,0,\omega)|^2 + r(s,\omega)^2\} ds] < \infty \tag{3.13}$$

とする．

【定理 3.2.3】 (3.11), (3.12), (3.13) の下で，確率微分方程式 (3.1) は一意解をもち，

$$E[|X_t|^2] \le E[|\xi|^2 + 2K \int_0^t r(s,\omega)^2 ds] e^{2Kt}, \quad t \le T \tag{3.14}$$

を満たす．

***!* 注意** (3.3) と (3.4) を仮定すれば，$r(t,\omega)^2 = \parallel \sigma(t,0,\omega) \parallel^2 + |b(t,0,\omega)|^2$ として，(3.12), (3.13) が成り立っている．したがって，この定理は前定理の拡張になっている．また，条件

$$\parallel \sigma(t,x,\omega) \parallel^2 + |b(t,x,\omega)|^2 \le K(1 + |x|^2) \tag{3.12$'$}$$

の下で考えることも多いが，このときも，$E[|\xi|^2] < \infty$, と (3.11) を仮定すれば，定理の条件は満たされる．(3.12) では，ベクトル場 b は外向きには x について一次の増大度しか許されないが，内向きには任意の増大度を許している．

証明 一意性をまず示しておこう．$X, \tilde{X}$ を (3.1) の解とし，

$$\tau_R = \begin{cases} \inf\{t < T; |X_t| \ge R\}, & \{\} \ne \emptyset \\ T, & \{\} = \emptyset \end{cases}$$

とおき，$\tilde{X}$ に対しても $\tilde{\tau}_R$ を同様に定義する．$\tau = \tau_R \wedge \tilde{\tau}_R$ とおくとき，

$$E[\sup_{0 \le s \le t} |X_{s\wedge\tau} - \tilde{X}_{s\wedge\tau}|^2]$$

$$\le 2E[\sup_{0\le s\le t}|\int_0^{s\wedge\tau}\{\sigma(r,X_r,\omega)-\sigma(r,\tilde{X}_r,\omega)\}dB_r|^2]$$

$$+2E[\sup_{0\le s\le t}|\int_0^{s\wedge\tau}\{b(r,X_r,\omega)-b(r,\tilde{X}_r,\omega)\}dr|^2]$$

$$\le 8E[\int_0^{t\wedge\tau}\|\sigma(s,X_s,\omega)-\sigma(s,\tilde{X}_r,\omega)\|^2\,ds]$$

$$+2TE[\int_0^{t\wedge\tau}|b(s,X_s,\omega)-b(s,\tilde{X}_s,\omega)|^2ds]$$

$$\le (8+2T)K_R^2E[\int_0^t|X_{s\wedge\tau}-\tilde{X}_{s\wedge\tau}|^2ds]$$

$$\le (8+2T)K_R^2\int_0^t E[\sup_{0\le r\le s}|X_{r\wedge\tau}-\tilde{X}_{r\wedge\tau}|^2]ds$$

$m(t)=E[\sup_{0\le s\le t}|X_{s\wedge\tau}-\tilde{X}_{s\wedge\tau}|^2]$ とおくと，

$$m(t)\le c\int_0^t m(s)ds,\quad c=(8+2T)K_R^2,\ t\le T$$

より，グロンウォール の不等式により $m(t)=0$ となる．すなわち，

$$E[\sup_{0\le s\le T}|X_{s\wedge\tau}-\tilde{X}_{s\wedge\tau}|^2]=0$$

ゆえに，$P(\sup_{0\le t\le T}|X_{t\wedge\tau}-\tilde{X}_{t\wedge\tau}|>0)=0$ だから $\tau_R=\tilde{\tau}_R$ a.s. となり，$\lim_{R\to\infty}P(\tau_R<T)=0$ となる $X=\{X_t\}$ の存在を示せば $P(\sup_{0\le t\le T}|X_t-\tilde{X}_t|>0)=0$ となり，一意性がわかる．

存在．

$$\sigma_r(t,x,\omega)=\begin{cases}\sigma(t,x,\omega), & |x|\le r\\ \sigma(t,\frac{rx}{|x|},\omega), & |x|>r\end{cases}$$

$$b_r(t,x,\omega)=\begin{cases}b(t,x,\omega), & |x|\le r\\ b(t,\frac{rx}{|x|},\omega), & |x|>r\end{cases}$$

とおき，次の確率微分方程式を考える．

$$X_t^r=\xi+\int_0^t\sigma_r(s,X_s^r,\omega)dB_s+\int_0^t b_r(s,X_s^r,\omega)ds \tag{3.15}$$

このとき，(3.12), (3.13) より，$E[\int_0^T \| \sigma_r(s,0,\omega) \|^2 \, ds] < \infty$ であるから，定理 3.2.1 より，(3.15) は解 $\{X_t^r\}$ をもつが，

$$\tau_R^r = \begin{cases} \inf\{t < T; |X_t^r| \geq R\}, & \{\} \neq \emptyset \\ T, & \{\} = \emptyset \end{cases}$$

とすれば (3.5) より，$\lim_{R\to\infty} P(\tau_R^r < T) = 0$ であるからこの解は一意である．さて，$\rho_R = \tau_R^R$ とおくと，伊藤の公式より

$$\begin{aligned} &E[|X_{t\wedge\rho_R}^R|^2] \\ &= E[|\xi|^2 + \int_0^{t\wedge\rho_R} \{\| \sigma_R(s,X_s^R,\omega) \|^2 + 2(X_s^R)^* b_R(s,X_s^R,\omega)\} ds] \\ &\leq E[|\xi|^2 + 2K \int_0^{t\wedge\rho_R} (r_s^2 + |X_s^R|^2) ds] \\ &\leq E[|\xi|^2] + 2KE[\int_0^t (r_s^2 + |X_{s\wedge\rho_R}^R|^2) ds] \end{aligned}$$

だから，$m(t) = E[|X_{t\wedge\rho_R}^R|^2]$, $\eta_t = \int_0^t E[r_s^2] ds$, $c = E[|\xi|^2]$ とおけば，

$$m(t) \leq c + 2K\eta_t + 2K \int_0^t m(s) ds \tag{3.16}$$

だからグロンウォール の不等式から

$$m(t) \leq c + 2K\eta_t + 2K \int_0^t (c + 2K\eta_s) e^{2K(t-s)} ds$$

がわかり，したがって

$$E[|X_{t\wedge\rho_R}^R|^2] \leq (c + 2K\eta_t) e^{2Kt}, \quad t \leq T \tag{3.17}$$

よって，

$$R^2 P(\rho_R < T) \leq E[|X_{T\wedge\rho_R}^R|^2] \leq (c + 2K\eta_T) e^{2KT}$$

から $\lim_{R\to\infty} P(\rho_R < T) = 0$ がわかる． $R < R'$ とするとき，$\sigma_R(t,x,\omega) = \sigma_{R'}(t,x,\omega)$, $b_R(t,x,\omega) = b_{R'}(t,x,\omega)$, $|x| \leq R$ であるから

$$P(\sup_{0\leq s\leq T\wedge\rho_R} |X_s^R - X_s^{R'}| > 0) = 0$$

$R_n \nearrow \infty, n \to \infty$ をとると，$P(\bigcap_n \{\omega; \rho_{R_n} < T\}) = 0$ だから $P(\Omega_0) = 1$ なる Ω_0 があり，$\omega \in \Omega_0$ に対して $\exists n_0(\omega)$ s.t. $\rho_{R_n} = T$, $n \geq n_0(\omega)$ となる．したがって，$X_t(\omega) = X_t^{R_{n_0(\omega)}}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_t^{R_n}(\omega)$, $\omega \in \Omega_0$ と定義すれば，明らかに，確率1でこの収束は t について一様である．また，

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s, \omega)dB_s + \int_0^t b(s, X_s, \omega)ds, \quad \forall t \leq \rho_{R_n} \text{ a.s.}$$

であり，$\rho_{R_n} \to T$ a.s. であったから

$$X_t(\omega) = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s, \omega)dB_s + \int_0^t b(s, X_s, \omega)ds, \quad \forall t \leq T \text{ a.s.}$$

また (3.17) から (3.14) が従う．■

【系 3.2.4】 マルコフ型のときは

$$\frac{1}{2} \parallel \sigma(t,x) \parallel^2 + x^* b(t,x) \leq K(r(t) + |x|^2) \tag{3.18}$$

$$\int_0^T \{|b(t,0)|^2 + |r(t)|^2\}dt < \infty, \quad E[|\xi|^2] < \infty \tag{3.19}$$

および，(3.11) を仮定するとき，(3.1) は一意解をもち，その解は

$$E\|X_t|^2] \leq (E[|\xi|^2] + 2K \int_0^t r(s)^2 ds)e^{2Kt}$$

を満たす．特に σ, b が時間 t によらない場合，(3.11) と

$$\frac{1}{2} \parallel \sigma(x) \parallel^2 + x^* b(x) \leq K(1 + |x|^2) \tag{3.18$'$}$$

$$E[|\xi|^2] < \infty \tag{3.19$'$}$$

を仮定するとき，一意解の存在がいえる．

■ **例 3.1** ■ 1次元マルコフ型確率微分方程式

$$dX_t = (\alpha X_t + \beta)dB_t + \gamma X_t^n dt, \quad X_0 = x$$

を考える．ここで，α, β, γ は定数で n は自然数とする．$\gamma < 0$ で n が奇数ならば

$$\gamma x^{n+1} \leq 0, \ \ (\alpha x + \beta)^2 \leq K(1 + x^2)$$

であるから，(3.18)′ は満たされ，(3.11) は明らかであるから一意解が存在する．

また，多次元マルコフ型確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + QX_t|X_t|^{2m}dt, \ \ X_0 = x$$

で Q は定数行列とする．$m \geq 0$ で Q が対称非正定値 のとき，$\sigma(x)$ が滑らかで，$\| \sigma(x) \|^2 \leq K(1 + |x|^2)$ ならば (3.11), (3.18)′, (3.19)′ は満たされ，一意解が存在する．

***!* 注意** $U(x)$ を R^N 上の滑らかな関数で，

$$\frac{1}{2}\Delta U - |\nabla U|^2 \leq c$$

でかつ，$\inf_{|x|=R} U(x) \to \infty$, $R \to \infty$ なるものとする．このときマルコフ型確率微分方程式

$$dX_t = dB_t - \nabla U(X_t)dt, \ \ X_0 = x$$

に対しても 近似方程式 (3.15) を考える．このとき，伊藤の公式より，

$$U(X_t) = U(x) + \int_0^t \nabla U(X_s)dB_s + \int_0^t (\frac{1}{2}\Delta U(X_s) - |\nabla U(X_s)|^2)ds$$

であるから，

$$E[U(X_{T\wedge\rho_R})] \leq U(x) + cT$$

が得られ，

$$P(\rho_R < T) \inf_{|x|=R} U(x) \leq U(x) + cT$$

から，$P(\rho_R < T) \to 0$, $R \to \infty$ がわかるから，上の定理の証明と同様に一意解の存在が示される．

さて，確率微分方程式 (3.1) の解のより高次のモーメントを評価しておこう．$t \to 0$ の挙動まで見えるよう少し詳しく評価する．仮定は

$$\| \sigma(t,x,\omega) \|^2 \le K(\rho(t,\omega)^2 + |x|^2), \quad x^* b(t,x,\omega) \le K(\rho(t,\omega)^2 + |x|^2) \tag{3.20}$$

とする．ただし，$\rho(t,\omega)$ は発展的可測であるとする．

【補題 3.2.5】 (3.20) の下で，確率微分方程式 (3.1) の解 $X = \{X_t\}_{t \le T}$ は次の評価を満たす．

$$E[|X_t|^{2q}]^{\frac{1}{q}} \le c_1^{\frac{1}{q}} e^{c_2 t} + c_2 \int_0^t e^{c_2(t-s)} E[\rho_s^{2q}]^{\frac{1}{q}} ds, \ t \le T \tag{3.21}$$

ただし，$q \ge 1$, $c_1 = E[|X_0|^{2q}]$, $c_2 = (2q+1)K$ である．

証明　右辺が有限のときに示せばよい．伊藤の公式により，

$$\begin{aligned}
|X_t|^{2q} = |X_0|^{2q} &+ 2q \int_0^t |X_s|^{2(q-1)} X_s^* \sigma(s, X_s, \omega) dB_s \\
&+ \int_0^t 2q |X_s|^{2(q-1)} X_s^* b(s, X_s, \omega) ds \\
&+ \int_0^t q |X_s|^{2(q-1)} \| \sigma(s, X_s, \omega) \|^2 \, ds \\
&+ \int_0^t 2q(q-1) |X_s|^{2(q-2)} |X_s^* \sigma(s, X_s, \omega)|^2 ds
\end{aligned}$$

τ_R を前定理の証明と同様にとり，(3.20) を用いると

$$\begin{aligned}
E[|X_{t\wedge\tau_R}|^{2q}] &\le E[|X_0|^{2q}] + E[\int_0^{t\wedge\tau_R} 2qK |X_s|^{2(q-1)} (\rho_s^2 + |X_s|^2) ds \\
&\quad + E[\int_0^{t\wedge\tau_R} q(2q-1)K |X_s|^{2(q-1)} (\rho_s^2 + |X_s|^2) ds] \\
&\le E[|X_0|^{2q}] + q(2q+1)KE[\int_0^t |X_{s\wedge\tau_R}|^{2q} ds] \\
&\quad + q(2q+1)KE[\int_0^t \rho_{s\wedge\tau_R}^2 |X_{s\wedge\tau_R}|^{2(q-1)} ds]
\end{aligned}$$

$$\leq E[|X_0|^{2q}] + q(2q+1)KE[\int_0^t |X_{s\wedge\tau_R}|^{2q}ds]$$
$$+q(2q+1)K\int_0^t E[\rho_{s\wedge\tau_R}^{2q}]^{\frac{1}{q}} E[|X_{s\wedge\tau_R}|^{2q}]^{\frac{q-1}{q}} ds$$

ここで，$m(t) = E[|X_{t\wedge\tau_R}|^{2q}]$, $c_1 = E[|X_0|^{2q}]$, $c_2 = (2q+1)K$, $\eta_t = qE[\rho_{t\wedge\tau_R}^{2q}]^{\frac{1}{q}}$ とおけば，

$$m(t) \leq c_1 + c_2 q\int_0^t m(s)ds + c_2\int_0^t \eta_s m(s)^{1-\frac{1}{q}}ds \tag{3.22}$$

$$G_\delta : \alpha(\cdot) \mapsto \delta + c_1 + c_2 q\int_0^t \alpha(s)ds + c_2\int_0^t \eta_s \alpha(s)^{1-\frac{1}{q}}ds, \quad \delta > 0$$

とおくとき，次のことは明らかである．

$$0 \leq \alpha_1(t) \leq \alpha_2(t),\ \forall t \Longrightarrow 0 \leq G_\delta\alpha_1(t) \leq G_\delta\alpha_2(t),\ \forall t \tag{3.23}$$

$$\alpha_n(t) : \text{有界で}\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n(t) = \alpha(t),\ \forall t \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} G_\delta\alpha_n(t) = G_\delta\alpha(t) \tag{3.24}$$

さらに，$v(t) = Me^{c_2qt}$ とし，M を十分大きくとると，

$$G_\delta v(t) \leq v(t) \tag{3.25}$$

実際，

$$\frac{\delta + c_1}{M} + \frac{e^{c_2qT}}{M^{\frac{1}{q}}}\int_0^T \eta_s e^{-c_2s}ds < 1$$

なるように M を大きくとれば，

$$G_\delta v(t) = \delta + c_1 + M(e^{c_2qt} - 1) + c_2\int_0^t M^{1-\frac{1}{q}}\eta_s e^{c_2(q-1)s}ds$$
$$\leq M(\frac{\delta + c_1}{M} + \frac{e^{c_2qt}}{M^{\frac{1}{q}}}\int_0^t \eta_s e^{-c_2s}ds - 1) + Me^{c_2qt}$$
$$\leq v(t)$$

となる．このとき，さらに $m(t) \leq v(t)$ となるように M を大きくとると (3.23) より，

$$m(t) \leq G_\delta m(t) \leq G_\delta^2 m(t) \leq \cdots \leq G_\delta^n m(t) \leq v(t)$$

であり，したがって $\exists \lim_{n\to\infty} G_\delta^n m(t) \equiv v_\delta(t)$ であり，$m(t) \le v_\delta(t)$ となる．また (3.24) より，

$$v_\delta(t) = G_\delta v_\delta(t) = \delta + c_1 + c_2 q \int_0^t v_\delta(s)ds + c_2 \int_0^t \eta_s v_\delta(s)^{1-\frac{1}{q}} ds$$

であり，したがって $0 < c_1 + \delta = v_\delta(0) \le v_\delta(t)$. また $v_\delta'(t) = c_2 q v_\delta(t) + c_2 \eta_t v_\delta^{1-\frac{1}{q}}(t)$ より，

$$v_\delta'(t) v_\delta^{\frac{1}{q}-1} = c_2 q v_\delta^{\frac{1}{q}} + c_2 \eta_t$$

$\gamma(t) = v_\delta^{\frac{1}{q}}(t)$ とおいて，

$$q\gamma'(t) = c_2 q \gamma(t) + c_2 \eta_t$$

よって，

$$\gamma(t) = e^{c_2 t}(c_0 + \int_0^t e^{-c_2 s} \frac{c_2}{q} \eta_s ds),\ c_0 = \gamma(0) = (c_1 + \delta)^{\frac{1}{q}}$$

したがって，$\delta \to 0$ として

$$m(t) \le e^{c_2 q t}(c_1^{\frac{1}{q}} + \frac{c_2}{q} \int_0^t e^{-c_2 s} \eta_s ds)^q$$

ゆえに，

$$E[|X_{t\wedge\tau_R}|^{2q}] \le e^{c_2 q t}(c_1^{\frac{1}{q}} + \frac{c_2}{q} \int_0^t e^{-c_2 s} \eta_s ds)^q$$

$R \to \infty$ として (3.21) を得る． ■

補題 3.2.5 では $X_0 = 0$ とすると X_t の $2q$ 次のモーメントが $t \to 0$ で q 次のオーダーであることを定数まで込めて詳しく評価している．単にモーメントの有限性を証明するならより簡単な証明も可能である．さて，(3.20) を強めて最大値のモーメントを評価しよう．次を仮定する．発展的可測過程 r_s に対して，

$$\| \sigma(s,x,\omega) \|^2 + |b(s,x,\omega)|^2 \le K(r_s^2 + |x|^2) \tag{3.26}$$

【補題 3.2.6】 (3.26) の仮定の下で確率微分方程式 (3.1) の解は

$$E[\sup_{0\le s\le t} |X_s - \xi|^{2q}] \le c t^{q-1} E[\int_0^t (r_s^{2q} + |\xi|^{2q}) ds],\ c = c(K,q,T) \tag{3.27}$$

証明

$$|X_s - X_0|^{2q} \le 2^{2q-1}|\int_0^s \sigma(r, X_r, \omega)dB_r|^{2q} + 2^{2q-1}|\int_0^s b(r, X_r, \omega)dr|^{2q}$$

より，

$$\begin{aligned}
&E[\sup_{0\le s\le t}|X_s - X_0|^{2q}] \\
&\le cE[(\int_0^t \| \sigma(s, X_s, \omega) \|^2 ds)^q] + ct^{2q-1}E[\int_0^t |b(s, X_s, \omega)|^{2q}ds] \\
&\le ct^{q-1}E[\int_0^t (r_s^{2q} + |X_s|^{2q})ds] + ct^{2q-1}E[\int_0^t (r_s^{2q} + |X_s|^{2q})ds] \\
&\le ct^{q-1}E[\int_0^t (r_s^{2q} + |X_s|^{2q})ds] \equiv I, \quad c = c(K, q, T)
\end{aligned}$$

ここで，Burkholder-Davis-Gundy の不等式を使った．補題 3.2.5 より，

$$E[|X_s|^{2q}] \le c_1E[|\xi|^{2q}] + c_1s^{q-1}\int_0^s E[r_v^{2q}]dv, \;\; c_1 = c_1(K, q, T)$$

であるから

$$I \le ct^{q-1}E[\int_0^t (r_s^{2q} + |\xi|^{2q})ds]$$

■

さて，σ, b がリプシッツ条件 (3.3) を満たすとき，$r(s,\omega)^2 = \| \sigma(s, 0, \omega) \|^2 + |b(s, 0, \omega)|^2$ ととれば，(3.26) が成立するので補題 3.2.5 と 3.2.6 により，

$$E[|X_t|^{2q}] \le c_1E[|\xi|^{2q}] + c_1t^{q-1}\int_0^t E[r_s^{2q}]ds \tag{3.28}$$

および，

$$E[\sup_{0\le s\le t}|X_s - \xi|^{2q}] \le ct^{q-1}E[\int_0^t (r_s^{2q} + |\xi|^{2q})ds] \tag{3.29}$$

が得られる．

最後に，(3.3) を満たす係数をもつ 2 つの確率微分方程式の解の比較を行っておこう．

【定理 3.2.7】 $\sigma^{(1)}, b^{(1)}, \sigma^{(2)}, b^{(2)}$ がそれぞれ (3.3) を満たし，$X^{(1)}, X^{(2)}$ が対応する確率微分方程式 (3.1) の初期条件を $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ とする解とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
E[\sup_{0\le s\le t}|X_s^{(1)}-X_s^{(2)}|^{2q}] &\le cE[|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{2q}]\\
&+ct^{q-1}E[\int_0^t |b^{(1)}(s,X_s^{(2)},\omega)-b^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)|^{2q}ds]\\
&+ct^{q-1}E[\int_0^t \| \sigma^{(1)}(s,X_s^{(2)},\omega)-\sigma^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)\|^{2q})ds]
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

証明　$Y_t = X_t^{(1)} - X_t^{(2)}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
Y_t = \xi^{(1)}-\xi^{(2)} &+ \int_0^t \{\sigma^{(1)}(s,Y_s+X_s^{(2)},\omega)-\sigma^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)\}dB_s\\
&+\int_0^t \{b^{(1)}(s,Y_s+X_s^{(2)},\omega)-b^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)\}ds
\end{aligned}
$$

より，$\sigma(s,y,\omega)=\sigma^{(1)}(s,y+X_s^{(2)},\omega)-\sigma^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)$, $b(s,y,\omega)=b^{(1)}(s,y+X_s^{(2)},\omega)-b^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)$ とおけば σ, b はリプシッツ条件 (3.3) を満たす．したがって $r(s,\omega)^2 = \| \sigma^{(1)}(s,X_s^{(2)},\omega)-\sigma^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)\|^2 + |b^{(1)}(s,X_s^{(2)},\omega)-b^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)|^2$ とするとき，Y に対して (3.27) が成立する．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
E[\sup_{0\le s\le t}|Y_t-(\xi^{(1)}-\xi^{(2)})|^{2q}] &\le ct^qE[|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{2q}]\\
&+ct^{q-1}E[\int_0^t \| \sigma^{(1)}(s,X_s^{(2)},\omega)-\sigma^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)\|^{2q}\,ds]\\
&+ct^{q-1}E[\int_0^t |b^{(1)}(s,X_s^{(2)},\omega)-b^{(2)}(s,X_s^{(2)},\omega)|^{2q}ds]
\end{aligned}
$$

$|Y_t|^{2q} \le 2^{2q-1}|Y_t-(\xi^{(1)}-\xi^{(2)})|^{2q}+2^{2q-1}|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{2q}$ より (3.30) が得られる．■

！注意　$\sigma^{(1)}\equiv\sigma^{(2)}$, $b^{(1)}\equiv b^{(2)}$ のときは，(3.30) は

$$
E[\sup_{0\le s\le t}|X_s^{(1)}-X_s^{(2)}|^{2q}] \le cE[|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{2q}] \tag{3.30$'$}
$$

となる．

3.3　線形確率微分方程式

定数係数常微分方程式

$$\frac{dx_t}{dt} = ax_t + b, \;\; x_0 = \xi$$

の解は定数変化法により，

$$x_t = e^{at}(\xi + b\int_0^t e^{-as}ds)$$

と求められるように，定数係数確率微分方程式

$$dX_t = \sigma dB_t + (aX_t + b)dt, \;\; X_0 = \xi$$

の解は

$$X_t = e^{at}(\xi + b\int_0^t e^{-as}ds + \sigma\int_0^t e^{-as}dB_s)$$

と求められる．実際伊藤の公式により，簡単に確かめられる．これを，一般化して，次のマルコフ型線形確率微分方程式を考えておこう．

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(s)dB_s + \int_0^t (A(s)X_s + b(s))ds \tag{3.31}$$

なる確率微分方程式を考える．ここで，

$$\begin{aligned}
\sigma(s) &: \; [0,T] \mapsto R^N \otimes R^m \\
A(s) &: [0,T] \mapsto R^N \otimes R^N \\
b(s) &: \; [0,T] \mapsto R^N
\end{aligned}$$

はすべて有界可測とし，$\xi : \Omega \mapsto R^N$ は $\mathcal{F}_0$ 可測で $E[\xi^2] < \infty$ なるものとする．このとき，(3.31) は定理 3.2.1 の条件を満たすので，一意解 $X = \{X_t\}_{t \le T}$ をもつ．この解について調べておこう．常微分方程式

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y(t) + b(t), \quad Y(0) = \xi \tag{3.32}$$

の解 $Y(t)$ は次の同次形方程式の基本解 $\Phi(t)$:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = E \tag{3.33}$$

を使って

$$Y(t) = \Phi(t)(\xi + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds) \tag{3.34}$$

と表されることは，定数変化法として知られている．ここで E は単位行列である．さらに，伊藤の公式を使えば 確率微分方程式 (3.31) の解は

$$X(t) = \Phi(t)(\xi + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dB_s) \tag{3.35}$$

と書けることがわかる．実際

$$\begin{aligned} dX(t) &= \dot{\Phi}(t)(\xi + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dB(s))dt \\ &\quad + \Phi(t)(\Phi^{-1}(t)b(t)dt + \Phi^{-1}(t)\sigma(t)dB(t)) \\ &= A(t)X(t)dt + b(t)dt + \sigma(t)dB(t) \end{aligned}$$

であるからである．さて，このとき，ξ がガウス型であれば $X(t)$ はガウス過程となる，すなわち，任意に有限個の時点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ をとるとき，

$$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$$

が $N \times n$ 次元ガウス型確率変数となることに注意しておこう．なぜなら，単関数 $\alpha_j(s) = \sum_{k=1}^{j} c_k I_{[s_{k-1}, s_k)}(s)$ に対して $Z_j(t) = \int_0^t \alpha_j(s)dB_s$ とおくとき，$(Z_j(t_1), Z_j(t_2), \cdots, Z_j(t_n))$ はガウス型であるが，$\int_0^t |\alpha_j(s) - \alpha(s)|^2 ds \to 0$ のとき，$Z(t) = \int_0^t \alpha(s)dB_s$ とおけば，$(Z(t_1), Z(t_2), \cdots, Z(t_n))$ もガウス型となることが示されるからである． さて，この $X(t)$ の平均

$$m(t) = E[X(t)]$$

と共分散行列

$$R(t,s) = E[(X(s) - m(s))(X(t) - m(t))^*]$$

を計算しておこう．

【命題 3.3.1】　i) $m(t)$ は 初期条件 $m(0) = E[\xi]$ を満たす (3.32) の 解である．

ii) $R(t,s)$ は

$$R(t,s) = \Phi(s)[R(0,0) + \int_0^{s\wedge t} \Phi^{-1}(r)\sigma(r)\sigma(r)^*\Phi^{-1}(r)^* dr]\Phi(t)^* \tag{3.36}$$

と表され，$R(t) = R(t,t)$ とおくとき，

$$\frac{dR(t)}{dt} = A(t)R(t) + R(t)A(t)^* + \sigma(t)\sigma(t)^* \tag{3.37}$$

を満たす．

証明 i) (3.35) より

$$m(t) = \Phi(t)[E[\xi] + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds]$$

となるので，明らかである．

ii) (3.35) を使えば

$$\begin{aligned} R(t,s) &= \Phi(s)E[(\int_0^{s\wedge t} \Phi^{-1}(r)\sigma(r)dB_r)(\int_0^{s\wedge t} \Phi^{-1}(r)\sigma(r)dB_r)^*]\Phi(t)^* \\ &\quad +\Phi(s)E[(\xi - m(0))(\xi - m(0))^*]\Phi(t)^* \\ &= \Phi(s)[R(0,0) + \int_0^{s\wedge t} \Phi^{-1}(r)\sigma(r)\sigma(r)^*\Phi^{-1}(r)^* dr]\Phi(t)^* \end{aligned}$$

よって (3.36) を得る． また，(3.33) と (3.36) から (3.37) を得る． ■

定数行列 $A(t) \equiv A$ のときは $\Phi(t) = e^{tA}$ であるので (3.35) は

$$X(t) = e^{tA}\xi + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds + \int_0^t e^{(t-s)A}\sigma(s)dB_s \tag{3.38}$$

と表され，また (3.36) は

$$R(t,s) = e^{sA}R(0)e^{tA^*} + \int_0^{s\wedge t} e^{(s-r)A}\sigma(r)\sigma(r)^* e^{(t-r)A^*} dr \tag{3.39}$$

となる．特に $N = m = 1$, $A(s) \equiv a < 0$, $b(s) \equiv 0$, $\sigma(s) \equiv \sigma$ のとき，

$$X(t) = e^{ta}\xi + \int_0^t e^{(t-s)a}\sigma dB_s$$

は Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動とよばれるものである．

また (3.31) で $N=m=1$, $\xi(\omega)\equiv x$, $A(s)=\frac{-1}{T-s}$, $b(s)=\frac{y}{T-s}$, $\sigma(s)\equiv 1$ とする．すなわち，

$$X_t = x + \int_0^t \frac{y-X_s}{T-s}ds + B_t \tag{3.40}$$

を考える． 上で見たように (3.40) は $[0,T)$ で一意解 $X(t)$ をもち，それはガウス過程である．この解をブラウン橋 (Brownian bridge) あるいはぴん留めブラウン運動 (pinned Brownian motion) という．また (3.35) の表現を使えば

$$X_t^{x,y} = x(1-\frac{t}{T}) + y\frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s}dB_s$$

$0\leq s<T$ がその一意解であることがわかる．このことから $\lim_{t\to T} X_t^{x,y} = y$ a.s. が示される．

次に一次元の場合に (3.31) を一般化した次の確率微分方程式を考える．

$$X(t) = \xi + \sum_{i=1}^m \int_0^t (f_i(s)X(s)+g_i(s))dB_s^i + \int_0^t (\alpha(s)X(s)+\beta(s))ds \tag{3.41}$$

また，これが一意解をもつことは上と同様であり，その解 $X(t)$ は

$$X(t) = \Psi_t(\xi + \int_0^t \Psi_s^{-1}(\beta(s) - \sum_{i=1}^m f_i(s)g_i(s))ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t \Psi_s^{-1} g_i(s)dB_s^i) \tag{3.42}$$

と表される．ここで，

$$\Psi_t = \exp(\sum_{i=1}^m \int_0^t f_i(s)dB_s^i + \int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m f_i(s)^2)ds) \tag{3.43}$$

であり，この Ψ_t は次の同次方程式

$$d\Psi_t = \alpha(t)\Psi_t dt + \sum_{i=1}^m f_i(t)\Psi_t dB_t^i, \quad \Psi_0 = 1$$

を満たすものである． (3.42) の $X(t)$ が (3.41) を満たすことを見るのはやはり伊藤の公式を使えばよい．この Ψ_t は幾何ブラウン運動ともよばれ，数理ファイナン

スにおいて，Black-Scholes による株価変動過程のモデルとして知られるものである（5.8 節参照）.

3.4　マルコフ型確率微分方程式と確率的流れ

$$\sigma(s,x) : [0,T] \times R^N \mapsto R^N \otimes R^m$$
$$b(s,x) : [0,T] \times R^N \mapsto R^N$$

が与えられているとき，次の確率微分方程式を考えよう.

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds \tag{3.44}$$

ここで，σ, b はリプシッツ条件 (3.3) と，

$$\| \sigma(s,0) \|^2 + |b(s,0)|^2 \leq M \tag{3.45}$$

を満たすと仮定する．このとき，定理 3.2.1 により (3.44) は一意解をもつ．この解を $X_t(x,\omega)$ と表すことにする．このとき，

【定理 3.4.1】 (3.3), (3.45) の下で (3.44) の解 $X_t(x,\omega)$ は 確率 1 で (t,x) について連続である.

証明　$s < t$ とする．解の一意性から $X_t(x,\omega) = X_{t-s}(X_s(x,\omega),\omega)$ となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
&|X_s(x,\omega) - X_t(y,\omega)|^{2q} \\
&\quad \leq 2^{2q-1}|X_s(x,\omega) - X_t(x,\omega)|^{2q} + 2^{2q-1}|X_t(x,\omega) - X_t(y,\omega)|^{2q} \\
&\quad = 2^{2q-1}|X_s(x,\omega) - X_{t-s}(X_s(x,\omega),\omega)|^{2q} + 2^{2q-1}|X_t(x,\omega) - X_t(y,\omega)|^{2q}
\end{aligned}$$

であるが，補題 3.2.6 と 3.2.5 により

$$\begin{aligned}
&E[|X_s(x,\omega) - X_{t-s}(X_s(x,\omega),\omega)|^{2q}] \\
&\quad \leq c|t-s|^{q-1}(M^q(t-s) + (t-s)E[|X_s(x,\omega)|^{2q}]) \\
&\quad \leq c|t-s|^q
\end{aligned}$$

また，定理 3.2.7 により，

$$E[|X_t(x,\omega) - X_t(y,\omega)|^{2q}] \leq c|x-y|^{2q}$$

したがって，

$$E[|X_s(x,\omega) - X_t(y,\omega)|^{2q}] \leq c|t-s|^q + c|x-y|^{2q}, \ \ \forall q \geq 1$$

よって，Kolmogorov-Chentsov の定理（付録参照）により $X_s(x,\omega)$ は (s,x) について連続な修正を確率 1 でもつことがわかる． ■

この定理は，$X_t(x,\omega) : [0,T] \times R^N \times \Omega \mapsto R^N$ を各 (t,ω) に対して，

$$X_t(\cdot,\omega) : R^N \mapsto R^N$$

とみるとき，この写像が連続であることを示している．したがって，$X_t(x,\omega)$ を $C(R^N;R^N)$ に値をとる確率過程とみなすことができる．このとき，$X_t(x,\omega)$ を確率的流れとよぶ ([24] 参照).

3.5　弱い解，マルチンゲール問題

汎関数型確率微分方程式

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_\cdot)dB_s + \int_0^t b(s, X_\cdot)ds \tag{3.46}$$

について考える．ここで，σ，b は

$$\sigma : [0,T] \times W^N \mapsto R^N \otimes R^m$$
$$b : \ [0,T] \times W^N \mapsto R^N$$

でそれぞれ，$\mathcal{B}_t(W^N)$ 発展的可測とする．ある $[0,T] \times R^N$ 上の $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(R^N)$ 可測関数 $\hat{\sigma}$, $\hat{b}$ があって $\sigma(t,w) = \hat{\sigma}(t,w(t))$, $b(t,w) = \hat{b}(t,w(t))$ となっているとき (3.46) はマルコフ型確率微分方程式

$$X_t = \xi + \int_0^t \hat{\sigma}(s, X_s)dB_s + \int_0^t \hat{b}(s, X_s)ds \tag{3.47}$$

となる．

(3.46) は 3.1 節の枠組みに入らないので次のように，定式化し直しておく．

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t, w, \omega) : [0, T] \times W^N \times \Omega \mapsto R^N \otimes R^m$$
$$\tilde{b} = \tilde{b}(t, w, \omega) : [0, T] \times W^N \times \Omega \mapsto R^N$$

が与えられているとし，確率微分方程式

$$X_t(\omega) = \xi(\omega) + \int_0^t \tilde{\sigma}(s, X_\cdot(\omega), \omega) dB_s + \int_0^t \tilde{b}(s, X_\cdot(\omega), \omega) ds \qquad (3.1)'$$

を考える．解の定義は定義 3.1.1 で，係数 σ, b をそれぞれ $\tilde{\sigma}, \tilde{b}$ に置き換え，その中の X_t を $X_\cdot$ と置き換えたものにすぎない．w, $w' \in W^N$ に対して

$$\| w - w' \|_T = \sup_{0 \le t \le T} |w(t) - w'(t)|$$

と定義しておく．このとき，

$$\begin{cases} \| \tilde{\sigma}(t, w, \omega) - \tilde{\sigma}(t, w', \omega) \| \le K \| w - w' \|_T \\ |\tilde{b}(t, w, \omega) - \tilde{b}(t, w', \omega)| \qquad \le K \| w - w' \|_T \end{cases}$$

$$E[|\xi|^2 + \int_0^T \{\| \tilde{\sigma}(s, 0, \omega) \|^2 + |\tilde{b}(s, 0, \omega)|^2\} ds] = M < \infty$$

を仮定するとき，$(3.1)'$ の一意解 $\{X_t\}_{t \le T}$ が存在し，

$$E[\sup_{0 \le t \le T} |X_t|^2] \le c e^{cT}$$

を満たすことが，定理 3.2.1 と同様にして証明できる．(3.46) は $(3.1)'$ で $\tilde{\sigma}(s, w, \omega) = \sigma(s, w)$, $\tilde{b}(s, w, \omega) = b(s, w)$ となっている特別な場合とみなせる．

問 3.1 上の条件の下で $(3.1)'$ の解の存在と一意性を定理 3.2.1 と同様にして示せ．

さて，確率微分方程式 (3.46) の解というとき，フィルター付き確率空間 とその上の ブラウン運動が与えられ，確率 0 の集合を除いて各 ω ごとに (3.46) を満たす発展的可測確率過程 $X_t(\omega)$ が 3.1, 3.2 節でいう解であった．特に初期条件が $\xi(\omega) \equiv x \in R^N$ のとき，$x \in R^N$ と ブラウン運動の軌道 $B_\cdot \in W^m$ の可測関数 $F : R^N \times W^m \mapsto W^N$ として (3.46) の解 $X_\cdot = F(x, B_\cdot)$ が求まるとき，その解を

強い解という．それに対して，解の概念を以下のように弱める考え方がある．

【定義 3.5.1】 ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と右連続で (1.14) を満たす σ 加法族の増大系 $\mathcal{F}_t$ と $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動 B_t があって，

i) ξ の分布は μ

ii) $P(\int_0^T (\| \sigma(s, X_\cdot) \|^2 + |b(s, X_\cdot)|)ds < \infty) = 1$

iii) $X_t = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_\cdot)dB_s + \int_0^t b(s, X_\cdot)ds, \ \forall t \leq T$ が確率 1 で成立する．

このとき，(X_t, B_t), $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ を初期分布を μ とする (3.46) の弱い解であるという．

また，解が一意であるというとき，(3.6) を意味していたが，弱い意味で，あるいは法則の意味で一意であるということを次のように定義する．

【定義 3.5.2】 初期分布が同じである (3.46) の弱い解 (X_t, B_t), $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$, $(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ が常に

$$P(X_\cdot \in B) = \tilde{P}(\tilde{X}_\cdot \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(W^N)$$

を満たすとき，(3.46) の解は弱い意味で（法則の意味で）一意であるという．

弱い意味での一意性に関して常に挙げられる例は田中の方程式とよばれる次のものである．

■ **例 3.2** ■ 確率微分方程式

$$X_t = \xi + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)dB_s \tag{3.48}$$

を考える．ここで，

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

である．(X_t, B_t), $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ が (3.48) の弱い解であるとする．このとき，$X \in \mathcal{M}_{2,c}(\mathcal{F}_t)$ で $\langle X \rangle_t = t$ となる．したがって，2.6 節の例 2.7 により，$\{X_t\}$ は $\mathcal{F}_t$

ブラウン運動である．すなわち，弱い意味の一意性が成立する．しかしながら，(3.48) の解 (X_t, B_t) に対して $(-X_t, B_t)$ を考えればこれはまた (3.48) の解である．したがって，(3.6) の意味での一意性は成立しない．

さて，初期分布を δ_x とする (3.46) の弱い解 (X_t, B_t), $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ が与えられたとする．このとき，$X_.$ の $(W^N, \mathcal{B}(W^N))$ 上の分布を P_x と書くことにする．$(R^N, \mathcal{B}(R^N))$ 上の確率測度 μ に対して $P_\mu(B) = \int P_x(B)\mu(dx)$, また $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t(W^n) = \sigma(w(s); 0 \leq s \leq t)$ とおく．このとき，

$$P_\mu(w(0) \in \Gamma) = P(X_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}(R^N) \tag{3.49}$$

$\forall f \in C^2(R^N)$ に対して，

$$\begin{gathered} M^f(0,t) \equiv f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t Lf(r, w(r))dr \\ \text{は } P_\mu \text{ に関して } \mathcal{B}_t \text{ 局所マルチンゲール} \end{gathered} \tag{3.50}$$

となる．ここで

$$(Lf)(s,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(s,w)D_{ij}f(x) + \sum_{i=1}^N b^i(s,w)D_i f(x),$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \ \ D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \ \ a^{ij} = \sum_{k=1}^m \sigma_k^i \sigma_k^j$$

(3.49) は明らかであろう．(3.50) を示す．

$$\sigma_n(w) = \begin{cases} \inf\{t \leq T; |w(t)| \geq n, \ \text{または} \ \displaystyle\int_0^t |\sigma_j^i(s,w)|^2 ds \geq n, \ \exists i,j\}, & \\ & \{\} \neq \emptyset \text{ のとき} \\ T, & \{\} = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

とおき，$\tilde{\sigma}_n(\omega) = \sigma_n(X_.(\omega))$ とおけば，X_t が (3.46) の弱い解であることから，$P_\mu(\sigma_n \to T, \ n \to \infty) = P(\tilde{\sigma}_n \to T, \ n \to \infty) = 1$ であることに注意する．$\forall B \in \mathcal{B}_s$

に対して

$$E_\mu[f(w(t\wedge\sigma_n))-f(w(0))-\int_0^{t\wedge\sigma_n}Lf(r,w(r))dr;B]$$
$$=E_\mu[f(w(s\wedge\sigma_n))-f(w(0))-\int_0^{s\wedge\sigma_n}Lf(r,w(r))dr;B] \tag{3.51}$$

をいえばよいが，$\{\omega;X_\cdot(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}_s$ であるので，

$$E[f(X(t\wedge\tilde\sigma_n))-f(X(0))-\int_0^{t\wedge\tilde\sigma_n}Lf(r,X(r))dr;X_\cdot\in B]$$
$$=E[\sum_{i,j}\int_0^{t\wedge\tilde\sigma_n}\sigma^i_j(r,X_\cdot)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(r))dB^j_r;X_\cdot\in B]$$
$$=E[\sum_{i,j}\int_0^{s\wedge\tilde\sigma_n}\sigma^i_j(r,X_\cdot)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(r))dB^j_r;X_\cdot\in B]$$

となり，(3.50) が成立することがわかる．さて，ここで局所マルチンゲール問題を定義する．

【定義 3.5.3】 $(W^N,\mathcal{B}(W^N))$ 上の確率測度 P が上の (3.49), (3.50) を満たすとき，P を 初期分布を μ とする (a,b) 局所マルチンゲール問題の解であるという．

さて，以下では，$(W^N,\mathcal{B}(W^N))$ 上の確率測度 P が与えられたとき，

$$\mathcal{N}=\{F\subset W^N;G\in\mathcal{B}(W^N),\text{s.t. }F\subset G,\ P(G)=0\}$$

$\mathcal{G}_t=\mathcal{B}_t\vee\mathcal{N}$, $\mathcal{F}_t=\mathcal{G}_{t+}$, $\mathcal{F}=\bigvee_{t\geq0}\mathcal{F}_t$ とする．このとき，$\mathcal{F}_t$ は 右連続で (1.14) を満たす．さらにまた，次のことがいえる．

【補題 3.5.4】 $M^f(0,t)$ が $\mathcal{B}_t$ 局所マルチンゲールであるならば，$\mathcal{F}_t$ 局所マルチンゲールである．

証明　$M^f(0,t)$ が $\mathcal{B}_t$ 局所 マルチンゲールであるから，ある $\mathcal{B}_t$ 停止時刻の列 σ_n で $\sigma_n\to\infty$ a.s. $n\to\infty$ なるものがあり，$M^f(0,t\wedge\sigma_n)$ はマルチンゲールとなっ

ている．したがって $\forall F \in \mathcal{G}_{s+\frac{1}{m}}$ に対して $P(F \ominus B)=0$ なる $B \in \mathcal{B}_{s+\frac{1}{m}}$ があり，$s+\frac{1}{m}<t$ のとき，

$$E[M^f(0,t\wedge\sigma_n);B]=E[M^f(0,(s+\frac{1}{m})\wedge\sigma_n);B]$$

であるがこの B を F とおきかえてよい．よって，$\forall G \in \bigcap_m \mathcal{G}_{s+\frac{1}{m}}$ に対して

$$E[M^f(0,t\wedge\sigma_n);G]=E[M^f(0,(s+\frac{1}{m})\wedge\sigma_n);G]$$

$m\to\infty$ として

$$E[M^f(0,t\wedge\sigma_n);G]=E[M^f(0,s\wedge\sigma_n);G]$$

すなわち，$M^f(0,t\wedge\sigma_n)$ は $\mathcal{F}_t$ マルチンゲール．■

ここで次のことを注意しておこう．

【定理 3.5.5】 $L=\sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2}a^{ij}(s,w)D_{ij}+\sum_{i=1}^N b^i(s,w)D_i$ とするとき，$(W^N, \mathcal{B}(W^N))$ 上の確率測度 P に対して次は同値である．

i)　各 $f\in \mathbf{C}^2(R^N)$ に対して

$$f(w(t))-f(w(0))-\int_0^t (Lf)(s,w(s))ds$$

は P に関して 局所マルチンゲール．

ii)　各 $\xi\in R^N$ に対して

$$e^{\xi^*(w(t)-w(0)-\int_0^t b(s,w)ds)-\frac{1}{2}\int_0^t \xi^* a(s,w)\xi ds}$$

は P に関して局所マルチンゲール．

証明　i) ⇒ ii). 仮定より，$f(x)=x^i$ とれば，

$$M_t^i=w^i(t)-w^i(0)-\int_0^t b^i(s,w)ds$$

は P に関して $\mathcal{F}_t$ 局所マルチンゲールである．また，$f(x)=x^ix^j$ ととれば

$$N_t^{ij} = w^i(t)w^j(t) - w^i(0)w^j(0) - \int_0^t (a^{ij}(s,w) + b^i(s,w)w^j(s) + b^j(s,w)w^i(s))ds$$

も P に関して $\mathcal{F}_t$ 局所マルチンゲールである．このとき，$M_t^i M_t^j - \int_0^t a^{ij}(s,w)ds$ が局所マルチンゲール，したがって

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t a^{ij}(s,w)ds \tag{3.52}$$

となることを示す．

$$\begin{aligned}
&M_t^i M_t^j - \int_0^t a^{ij}(s,w)ds \\
&= N_t^{ij} + \int_0^t b^i(s,w)(w^j(s) - w^j(t))ds + \int_0^t b^j(s,w)(w^i(s) - w^i(t))ds \\
&\quad + 2w^i(0)w^j(0) - w^i(t)w^j(0) - w^j(t)w^i(0) + \int_0^t b^i(s,w)ds \int_0^t b^j(s,w)ds \\
&\quad + w^i(0)\int_0^t b^j(s,w)ds + w^j(0)\int_0^t b^i(s,w)ds \\
&= N_t^{ij} - w^i(0)M_t^j - w^j(0)M_t^i \\
&\quad + \int_0^t (M_s^j - M_t^j)b^i(s,w)ds + \int_0^t (M_s^i - M_t^i)b^j(s,w)ds \\
&= N_t^{ij} - w^i(0)M_t^j - w^j(0)M_t^i \\
&\quad - \int_0^t \left(\int_0^s b^j(r,w)dr\right)dM_s^i - \int_0^t \left(\int_0^s b^i(r,w)dr\right)dM_s^j
\end{aligned}$$

となり，(3.52) がわかる．$M_t = (M_t^1, \cdots, M_t^N)$ とおけば，

$$e^{\xi^*(w(t)-w(0)-\int_0^t b(s,w)ds)-\frac{1}{2}\int_0^t \xi^* a(s,w)\xi ds} = e^{\xi^* M_t - \frac{1}{2}\langle \xi^* M, \xi^* M\rangle_t}$$

が局所マルチンゲールであることは，例 2.9 よりわかる．

ii) $\Rightarrow$ i). 仮定より，

$$X_t^\xi = e^{\xi^*(w(t)-w(0)-\int_0^t b(s,w)ds)-\frac{1}{2}\int_0^t \xi^* a(s,w)\xi ds}$$

とおけば，任意の $\xi \in R^N$ に対して X_t^ξ は局所マルチンゲール．したがって

$$A_t = e^{\int_0^t \xi^* b(s,w)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \xi^* a(s,w)\xi ds}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\int_0^t A_s dX_s^\xi &= A_t X_t^\xi - 1 - \int_0^t X_s^\xi(\xi^* b(s,w) + \frac{1}{2}\xi^* a(s,w)\xi)A_s ds \\ &= e^{\xi^*(w_t - w_0)} - 1 - \int_0^t (\xi^* b(s,w) + \frac{1}{2}\xi^* a(s,w)\xi)e^{\xi^*(w_s - w_0)}ds\end{aligned}$$

は局所マルチンゲール． $f(x) = e^{\xi^* x}$ に対して

$$\sum_i b^i(s,w)D_i f(x) = \xi^* b(s,w)e^{\xi^* x}, \ \sum_{ij} a^{ij}(s,w)D_{ij}f(x) = \xi^* a(s,w)\xi e^{\xi^* x}$$

だから，任意の $\xi \in R^N$ に対して，この f をとるとき， $M^f(0,t)$ が局所マルチンゲールであることがわかる．したがって，$e^{\xi^* x}$ の形の一次結合である f に対しても $M^f(0,t)$ は局所マルチンゲール．$f \in \mathbf{C}^2$ に対しては二階微分までを上の形の f の広義一様収束極限となるよう近似すればよい． ■

上で (3.46) の弱い解が存在すればその解は (a,b) 局所マルチンゲール問題の解 (ただし $a = \sigma\sigma^*$) となることを示したが，逆の命題を次に示す．

【定理 3.5.6】 $(W^N, \mathcal{B}(W^N))$ 上の確率測度 P が

$$P(\int_0^T (\| a(s,w) \| + |b(s,w)|)ds < \infty) = 1 \tag{3.53}$$

を満たし，(a,b) 局所マルチンゲール問題の解であるとする．$a = \sigma\sigma^*$．このとき，(3.46) には弱い解が存在する．

証明 上でみたように，$f(x) = x^i$ ととれば，

$$M_t^i = w^i(t) - w^i(0) - \int_0^t b^i(s,w)ds$$

は P に関して $\mathcal{F}_t$ 局所マルチンゲールであり，

$$\langle M^i, M^j\rangle_t = \int_0^t a^{ij}(s,w)ds$$

である．ここで 定理 2.7.5 を使うことを考える．$m > N$ のときは $b^i(t,w) \equiv 0$, $N+1 \le i \le m$, $\sigma^i_j(t,w) \equiv 0$, $N+1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$ とおけば，上のマルチンゲール問題は初めから $(W^m, \mathcal{B}(W^m))$ で考えているものとしてよい．$m < N$ のときは，$\sigma^i_j(t,w) \equiv 0$, $1 \le i \le N$, $m+1 \le j \le N$ とおけばよいので，あらかじめ $m = N$ としておいてよい．したがって，定理 2.7.5 のように $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ とその上のブラウン運動 $\tilde{B}_t$ をとれば，

$$M^i_t = \sum_j \int_0^t \sigma^i_j(s,w)d\tilde{B}^j_s, \quad \tilde{P}- \text{ a.s.}$$

と表され，$\tilde{X}_t(w,w') = w(t)$ として

$$\tilde{X}_t = \xi + \int_0^t \sigma(s,\tilde{X}_\cdot)d\tilde{B}_s + \int_0^t b(s,\tilde{X}_\cdot)ds$$

の弱い解 $(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ の存在がいえる．■

さて，フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ で定義された (3.46) の解 (X_t, B_t), $(\tilde{X}_t, B_t)$ が $P(X_0 = \tilde{X}_0) = 1$ を満たすとき，常に (3.6) が成立するならば，(3.46) の解は道ごとに一意であるという．このとき，次の 山田・渡辺による定理は基本的である．

【定理 3.5.7】 (3.46) の解が道ごとに一意ならば，弱い意味でも一意である．

証明　μ を R^N 上の確率測度とし，$(X,B), (\Omega^{(0)}, \mathcal{F}^{(0)}, P^{(0)})$, $(\tilde{X}, \tilde{B}), (\tilde{\Omega}^{(0)}, \tilde{\mathcal{F}}^{(0)}, \tilde{P}^{(0)})$ を，初期分布が μ である (3.46) の弱い解であるとする．π を $R^N \times W^m \times W^N$ 上の $(X_0, B, X_\cdot - X_0)$ の分布とし，$\tilde{\pi}$ を $(\tilde{X}_0, \tilde{B}, \tilde{X}_\cdot - \tilde{X}_0)$ の分布とする．すなわち，

$$\pi(A) = P((X_0, B, X_\cdot - X_0) \in A), \ \ A \in \mathcal{B}(R^N) \otimes \mathcal{B}(W^m) \otimes \mathcal{B}(W^N)$$

$\tilde{\pi}$ も同様である．$(R^N \times W^m \times W^N, \mathcal{B}(R^N) \otimes \mathcal{B}(W^m) \otimes \mathcal{B}(W^N))$ は標準可測空間で

あり（付録参照），$(x,w^m,w^N)\mapsto(x,w^m)$ が $\mathcal{B}(R^N)\otimes\mathcal{B}(W^m)\otimes\mathcal{B}(W^N)/\mathcal{B}(R^N)\otimes\mathcal{B}(W^m)$ 可測であるから，(x,w^m) が与えられた下での正則条件付き確率 $Q_{x,w^m}(dw^N)$ が（同様に $\tilde{Q}_{x,w^m}(d\tilde{w}^N)$ も）存在する（付録参照）．ν^m を W^m 上のウィーナー測度とするとき，$\Omega\equiv R^N\times W^m\times W^N\times W^N$ 上の確率測度 P を

$$P(dx,dw^m,dw^N,d\tilde{w}^N)=\mu(dx)\nu^m(dw^m)Q_{x,w^m}(dw^N)\tilde{Q}_{x,w^m}(d\tilde{w}^N)$$

と定義する．そして，

$$\mathcal{G}_t=\sigma((x,w^m(s),w^N(s),\tilde{w}^N(s));0\le s\le t)$$

とし，$\mathcal{N}$ を Ω の P 零集合全体とし，

$$\mathcal{F}_t=\bigcap_{s>t}\sigma(\mathcal{G}_s\cup\mathcal{N})$$

とおけば，$\mathcal{F}_t$ は右連続で (1.14) を満たす．また，$\mathcal{F}=\bigvee_t\mathcal{F}_t$ とする．フィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P;\mathcal{F}_t)$ 上で考えた (3.46) の解の道ごとの一意性から

$$\begin{aligned}\pi((X_0,B,X_{\cdot}-X_0)\in A)&=P(\omega\in\Omega;(x,w^m,w^N)\in A)\\&=P(\omega\in\Omega;(x,w^m,\tilde{w}^N)\in A)\\&=\tilde{\pi}((\tilde{X}_0,\tilde{B},\tilde{X}_{\cdot}-\tilde{X}_0)\in A)\end{aligned}$$

となり，これは弱い解の一意性を意味する．■

3.6　ずれの変換，絶対連続性

(3.46) の弱い解と，

$$X_t=\xi+\int_0^t\sigma(s,X_{\cdot})dB_s+\int_0^t\tilde{b}(s,X_{\cdot})ds \tag{3.54}$$

の弱い解の関係を調べておこう．ただし，

$$\tilde{b}=b+a\gamma$$

であるとする．

【定理 3.6.1】 P は (3.53) を満たし，(a,b) 局所マルチンゲール問題の解とし，$\gamma(s,w):[0,T]\times W^N \mapsto R^N$ は $\mathcal{B}_t(W^N)$ 発展的可測であるとする．

$$Z_t(w) = e^{\int_0^t \gamma^*(s,w)dw_s - \int_0^t \gamma^* b(s,w)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma^* a\gamma(s,w)ds} \tag{3.55}$$

とおくとき，

$$E[Z_T] = 1 \tag{3.56}$$

ならば，$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t(w)$ とおけば，Q は $(a, b+a\gamma)$ 局所マルチンゲール問題の解である．

***!* 注意**　この，確率測度 P から Q への変換をずれの変換という．

証明　2.6 節で見たように，Q は $(W^N, \mathcal{F})$ 上の確率測度を定め，

$$Q(A) = E[Z_T; A], \quad A \in \mathcal{F}_T$$

である．P が (a,b) 局所マルチンゲール問題の解であるから

$$M_t^i = w_t^i - w_0^i - \int_0^t b^i(s,w)ds, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

$$Y_t = \sum_{i=1}^N \int_0^t \gamma_i(s,w)dM_s^i$$

とおくとき，

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t a^{ij}(s,w)ds$$

であり，

$$\tilde{M}_t^i = M_t^i - \langle M^i, Y \rangle_t = M_t^i - \sum_{j=1}^N \int_0^t a^{ij}(s,w)\gamma_j(s,w)ds$$

は Q について局所マルチンゲールで

$$\langle \tilde{M}^i, \tilde{M}^j \rangle_t = \langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t a^{ij}(s,w)ds$$

したがって，任意の $\xi \in R^N$ に対して

$$e^{\xi^* \tilde{M}_t - \frac{1}{2}\langle \xi^* \tilde{M}\rangle_t} = e^{\xi^*(w(t)-w(0)-\int_0^t (b+a\gamma)(s,w)ds)-\frac{1}{2}\int_0^t \xi^* a(s,w)\xi ds}$$

は Q について局所マルチンゲール．したがって，定理 3.5.5 により，$\forall f \in \mathbf{C}^2(R^N)$ に対して

$$f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t \{\sum_{ij} a^{ij}(s,w)D_{ij}f(w(s)) + \sum_i (b+a\gamma)^i(s,w)D_i f(w(s))\}ds$$

は Q について局所マルチンゲールである．■

！注意　i) 上の定理をブラウン運動を用いて言い直しておこう．(X_t, B_t), $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ を 初期分布を μ とする (3.46) の弱い解

$$X_t = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_.)dB_s + \int_0^t b(s, X_.)ds$$

とする．このとき，

$$Z_t(X_.(\omega)) = e^{\int_0^t \gamma^*(s,X_.)\sigma(s,X_.)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma^* a\gamma(s,X_.)ds}$$

で，$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t(X_.(\omega))$.

$$\begin{aligned}\tilde{B}_t^i &= B_t^i - \langle B_.^i, \sum_{k,j}\int_0^{\cdot} \gamma_k(s,X_.)\sigma_j^k(s,X_.)dB_s^j\rangle_t \\ &= B_t^i - \sum_k \int_0^t \gamma_k(s,X_.)\sigma_i^k(s,X_.)ds \\ &= B_t^i - \int_0^t (\sigma^*\gamma)^i(s,X_.)ds\end{aligned}$$

とおくとき，$E[Z_T(X_.)] = 1$ ならば Q は確率測度となり，$(\tilde{B}_t^1, \cdots, \tilde{B}_t^m)$ は Q に関してブラウン運動となる．したがって

$$\begin{aligned}X_t &= \xi + \int_0^t \sigma(s,X_.)dB_s + \int_0^t b(s,X_.)ds \\ &= \xi + \int_0^t \sigma(s,X_.)d\tilde{B}_s + \int_0^t a\gamma(s,X_.)ds + \int_0^t b(s,X_.)ds\end{aligned}$$

となり，$(X_t, \tilde{B}_t)$ は Q に関して (3.54) の解となる．

ii) $\sigma^*\gamma$ が有界とする．このとき，

$$\langle \int_0^\cdot \gamma^*(s, X_.)\sigma(s, X_.)dB_s\rangle_t = \int_0^t \gamma^* a\gamma(s, X_.)ds \leq ct$$

$\exists c > 0$ であるから，命題 2.6.2 により，$Z_t(X_.)$ はマルチンゲールである．したがって (3.56) $E[Z_T(X_.)] = 1$ が満たされる．

iii) 上の ii) の場合，(3.46) の解が一意的であれば (3.54) の解も一意的である．なぜなら，$(\hat{X}_t, \hat{B}_t)$, $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}; \hat{\mathcal{F}}_t)$ を (3.54) の解とするとき，

$$\hat{Z}_t = e^{-\int_0^t \gamma^*(s,\hat{X}_.)\sigma(s,\hat{X}_.)d\hat{B}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma^* a\gamma(s,\hat{X}_.)ds}$$

$$B_t = \hat{B}_t + \int_0^t \sigma^*\gamma(s, \hat{X}_.)ds$$

とおき，$\frac{dP}{d\hat{P}}|_{\hat{\mathcal{F}}_t} = \hat{Z}_t$ で P を定義するとき，B_t は $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, P; \hat{\mathcal{F}}_t)$ 上のブラウン運動となり，$(\hat{X}, B_t)$ は (3.46) の解となる．さらに

$$\frac{d\tilde{P}}{dP}|_{\hat{\mathcal{F}}_t} = e^{\int_0^t \gamma^*(s,\hat{X}_.)\sigma(s,\hat{X}_.)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma^* a\gamma(s,\hat{X}_.)ds} \equiv \tilde{Z}_t$$

で $\tilde{P}$ を定義するとき，

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \sigma^*\gamma(s, \hat{X}_.)ds$$

は $\tilde{P}$ に関してブラウン運動で $\tilde{Z}_t\hat{Z}_t = 1$ a.s. $\hat{P}$ となり，$\hat{P} = \tilde{P}$ となる．また，

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \sigma^*\gamma(s, \hat{X}_.)ds = \hat{B}_t$$

より，(3.54) の解は (3.46) の解からずれの変換で得られるものと一致することがわかり，一意性が示される．

【定理 3.6.2】 (3.46) は一意的な弱い解 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t), (X_t, B_t)$ をもつとし，$(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; \tilde{\mathcal{F}}_t)$ を (3.54) の弱い解であるとする．そして，

$$\tilde{P}(\int_0^T \gamma^* a\gamma(s, \tilde{X}_.)ds < \infty) = 1$$

$$\tilde{E}[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \gamma^* a\gamma(s,\tilde{X}_\cdot)ds}] < \infty$$

であるとする．このとき，$\tilde{Q} \equiv \tilde{P} \circ \tilde{X}_\cdot^{-1}$ は $Q \equiv P \circ X_\cdot^{-1}$ に関して絶対連続であり，$\frac{d\tilde{Q}}{dQ}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$ である．ただし，Z_t は (3.55) で定義したものである．

証明

$$U_t(w) = e^{-\int_0^t \gamma^*(s,w)dw_s + \int_0^t \gamma^* b(s,w)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \gamma^* a\gamma(s,w)ds}$$

とおくとき，

$$U_t(\tilde{X}_\cdot(\omega)) = e^{-\int_0^t \gamma^*(s,\tilde{X}_\cdot)\sigma(s,\tilde{X}_\cdot)d\tilde{B}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma^* a\gamma(s,\tilde{X}_\cdot)ds}$$

で，$\hat{P} = \tilde{P} \circ U_T(\tilde{X}_\cdot(\omega))$ と定義するとき，命題 2.7.7 により，$U_t(\tilde{X}_\cdot)$ は $\tilde{P}$ の下でマルチンゲールとなり，したがって，$\hat{P}$ は確率測度となる．また，

$$\hat{B}_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \sigma^*\gamma(s,\tilde{X}_\cdot)ds$$

とおけば，$\hat{B}_t$ は $\hat{P}$ の下でブラウン運動となり，

$$\tilde{X}_t = \xi + \int_0^t \sigma(s,\tilde{X}_\cdot)d\hat{B}_s + \int_0^t b(s,\tilde{X}_\cdot)ds$$

すなわち，$(\tilde{X}_t, \hat{B}_t)$ は (3.46) の解．仮定より，その弱い解は一意だから $P \circ X_\cdot^{-1} = \hat{P} \circ \tilde{X}_\cdot^{-1}$．また $\tilde{P} = \hat{P} \circ U_T^{-1}(\tilde{X}_\cdot)$,

$$U_T^{-1}(\tilde{X}_\cdot) = e^{\int_0^T \gamma^*(s,\tilde{X}_\cdot)d\tilde{X}_s - \int_0^T \gamma^* b(s,\tilde{X}_\cdot)ds - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^* a\gamma(s,\tilde{X}_\cdot)ds}$$

であるから

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ} = U_T^{-1}(w) = e^{\int_0^T \gamma(s,w)dw_s - \int_0^T \gamma^* b(s,w)ds - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^* a\gamma(s,w)ds} \qquad \blacksquare$$

4

拡散過程 I：推移半群とコルモゴロフ方程式

マルコフ型確率微分方程式の決める拡散過程の推移半群を通じて解析学との関連が明らかにされる．橋渡しをするのは伊藤の公式である．コルモゴロフ方程式は推移半群の生成作用素に関する方程式である．生成作用素に関する詳しい記述は第 6 章で行う．ここでは Feynman-Kac の公式を粘性解の概念を用いて証明する．拡散過程に関する期待値とコルモゴロフ方程式（線形放物型方程式）との関係は次章において，確率制御問題の値関数とベルマン方程式（非線形放物型方程式）との関係に一般化される．

4.1 マルコフ性

$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ を $\mathcal{F}_t$ が右連続で，(1.14) を満たすフィルター付き確率空間とする．このとき，次の時間的一様なマルコフ型確率微分方程式を考えよう．

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = x \tag{4.1}$$

B_t は m 次元標準 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動で，σ, b はそれぞれ

$$\sigma : R^N \mapsto R^N \otimes R^m$$
$$b : R^N \mapsto R^N$$

であり，リプシッツ条件

$$\begin{cases} \| \sigma(x) - \sigma(y) \| \le K|x-y|, \\ |b(x) - b(y)| \quad \le K|x-y| \end{cases} \tag{4.2}$$

を満たしているものとする．定理 3.2.1 によれば，(4.1) は各 $x \in R^N$ に対して一意解 $\{X_t^x\}$ をもつ．ただし，ここでは，$T=\infty$, すなわち，$[0,\infty)$ で考える．この解の誘導する $(W^N, \mathcal{B}(W^N))$ 上の確率測度を P_x とする．すなわち，

$$P_x \equiv P \circ (X_\cdot^x)^{-1}$$

このとき P_x は第 3 章でみたように，次の (4.3), (4.4) を満たす．

$$P_x(w(0)=x)=1 \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} M^f(t) \equiv f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t Lf(w(r))dr \\ \text{は } P_x \text{ に関して } \mathcal{B}_t \text{ マルチンゲール，} \forall f \in \mathbf{C}_b^2(R^N) \end{gathered} \tag{4.4}$$

ここで

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x)D_{ij}f(x) + \sum_{i=1}^N b^i(x)D_i f(x) \tag{4.5}$$

$a=\sigma\sigma^*$ である．なぜなら，3.5 節でみたように $M^f(t)$ は局所マルチンゲールであるが，一方，定理 3.2.1 より $E_x[|w(t)|^2]<\infty$. したがってマルチンゲールであることがわかる．ところで，(4.1) の解は一意であるから，定理 3.5.7 により，弱い意味でも一意となり，(4.3), (4.4) を満たす $(W^N, \mathcal{B}(W^N))$ 上の確率測度 P_x も一意となる．

さて，ここで，各 $s \ge 0$ に対して $\theta_s : W^N \mapsto W^N$ を

$$(\theta_s w)(t) = w(t+s), \quad 0 \le t < \infty$$

で定義する．

【定理 4.1.1】 各 x に対して (4.1) が一意的な弱い解をもっているとする．τ を

$\mathcal{B}_{t+}(W^N)$ 停止時刻とする．任意の有界な $\mathcal{B}(W^N)$ 可測関数 Y に対して

$$E_x[Y\circ\theta_\tau|\mathcal{B}_{\tau+}]=E_{w(\tau)}[Y],\quad P_x \text{ a.s.} \tag{4.6}$$

である．ただし，$\mathcal{B}_{\tau+}=\bigcap_{t>0}\mathcal{B}_{\tau+t}$.

証明　τ が有界な停止時刻のときにまず示す． $f\in\mathbf{C}_b^2(R^N)$ とする． 上で見たように，$M^f(t)$ は P_x について $\mathcal{B}_t$ マルチンゲールであったから，定理 1.6.2 と 補題 3.5.4 により $M^f(\tau+t)$, $t\geq 0$ は $\mathcal{B}_{(\tau+t)+}$ マルチンゲールである．したがって，$0<s<t$ とするとき，

$$E_x[M^f(\tau+t)-M^f(\tau+s);B]=0,\quad \forall B\in\mathcal{B}_{(\tau+s)+} \tag{4.7}$$

であり，

$$M^f(\tau+t,w)-M^f(\tau+s,w)=M^f(t,\theta_\tau w)-M^f(s,\theta_\tau w)$$

であるから，

$$P_x^\tau(w,A):W^N\times\mathcal{B}\mapsto[0,1]$$

を $\mathcal{B}_{\tau+}$ で条件づけた $\mathcal{B}=\mathcal{B}(W^N)$ 上の正則条件付き確率とし，

$$Q_w^\tau(A)=P_x^\tau(w,\theta_\tau^{-1}A)$$

とすると，(4.7) より， P_x a.s. w に対して

$$E^{Q_w^\tau}(M^f(t,\tilde{w})-M^f(s,\tilde{w});B)=0,\quad \forall B\in\mathcal{B}_s$$

であり，かつ

$$Q_w^\tau(\tilde{w}(0)=w(\tau))=P_x^\tau(w,\theta_\tau^{-1}\tilde{w}(0)=w(\tau))=1,\ \ P_x \text{ a.s. } w$$

一方，マルチンゲール問題：

$$P_{w(\tau)}(\tilde{w}(0)=w(\tau))=1$$

$$M^f(t,\tilde{w}) \text{ は } P_{w(\tau)} \text{ に関して } \mathcal{B}_t \text{ マルチンゲール } \forall f\in\mathbf{C}_b^2(R^N)$$

は一意であったから $Q_w^\tau = P_{w(\tau)}$. したがって

$$P_x(\theta_\tau^{-1}A|\mathcal{B}_{\tau+}) = P_x^\tau(w, \theta_\tau^{-1}A) = P_{w(\tau)}(A)$$

これは (4.6) を意味する.

τ が $P(\tau < \infty) = 1$ なる停止時刻のときは, $\tilde{\tau} = \tau \wedge s$ とすれば, 上から $\tilde{\tau}$ に対して (4.6) が示され, $s \to \infty$ として τ に対して (4.6) が示される. ■

! 注意　弱い解（マルチンゲール問題）の一意性に関しては, [42] を参照. (4.6) の性質を強マルコフ性という. また, 強マルコフ性をもつ, 連続確率過程を拡散過程という.

上の定理で $\tau(w) \equiv s \in R_+$ とし, R^N 上の有界可測関数 f で $Y(w) = f(w(t))$ と表されているとき, 座標関数 $X_t = X_t(w) = w(t)$ を使って (4.6) は

$$E_x[f(X_{t+s})|\mathcal{B}_{s+}] = E_{X_s}[f(X_t)], \quad P_x \text{ a.s.} \tag{4.8}$$

と表される. またこの性質をマルコフ性という.

4.2　Feller 半　群

(4.1) の解 X_t^x から決まった拡散過程 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P_x, X_t, \theta_t)$ について考えていく. ここで $\Omega = W^N$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_\infty$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}_{t+}$, $X_t(w) = w(t), w \in W^N$ である. この拡散過程の推移確率を

$$P(t, x, E) = P_x(X_t(w) \in E), \quad E \in \mathcal{B}(R^N) \tag{4.9}$$

と表すとき, (4.8) は

$$P(t+s, x, dy) = \int_{R^N} P(s, x, dz) P(t, z, dy) \tag{4.10}$$

を意味する. この等式は Chapman-Kolmogorov の等式とよばれるものである.

さて, R^N を一点コンパクト化した空間を $\bar{R}^N = R^N \cup \{\infty\}$, $\bar{R}^N$ 上の連続関数で $f(\infty) = 0$ なるもの全体を $\mathbf{C}_\infty$ と表すことにする. $\mathbf{C}_\infty$ 上のノルムを

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in R^N} |f(x)|$$

と定義する．

$$\begin{aligned}\bar{P}(t,x,E) &= P(t,x,E),\ \ x\in R^N,\ E\in\mathcal{B}(R^N)\\ \bar{P}(t,x,\{\infty\}) &= 0\\ \bar{P}(t,\infty,\{\infty\}) &= 1\end{aligned}$$

と $P(t,x,E)$ を拡張しておく．さらに，

$$P_tf(x)=\int_{R^N}\bar{P}(t,x,dy)f(y),\quad f\in\mathbf{C}_\infty \tag{4.11}$$

と定義すれば，この P_t は次のような性質をもつ．

【命題 4.2.1】 σ, b が (4.2) を満たし，有界であるとする．このとき，(4.1) の解から決まる推移確率により，P_t を (4.11) で定義するとき，次の i)-iv) が成立する．

i)　$P_t:\mathbf{C}_\infty\mapsto\mathbf{C}_\infty$

ii)　$\| P_tf\|_\infty\le\| f\|_\infty$　（縮小性）

iii)　$\| P_tf-f\|_\infty\to 0,\ \ t\to 0$　（強連続性）

iv)　$P_{t+s}=P_tP_s=P_sP_t$　（半群性）

証明　i) (4.1) の解を X_t^x と表すことにする．このとき，仮定より，$\|\sigma\|^2+|b|^2\le c$ なので

$$\begin{aligned}E[|X_t^x-x|^2]&\le 2E[|\int_0^t\sigma(X_s^x)dB_s|^2]+2E[|\int_0^t b(X_s^x)ds|^2]\\ &\le 2(ct+ct^2)\end{aligned}\tag{4.12}$$

である．$f\in\mathbf{C}_\infty$ とするとき，$\forall\epsilon>0$, に対して $\exists R$ で $|f(x)|<\epsilon$, $x\notin B_R$ なるものがあり，

$$P_tf(x)=E_x[f(X_t)]=E[f(X_t^x)],\ \ x\in R^N$$

であるから，$x\in B_{2R}^c$ とすると

$$\begin{aligned}|P_tf(x)|&\le E[|f(X_t^x)|]\\ &\le\epsilon+\| f\|_\infty P(|X_t^x-x|>R)\end{aligned}$$

であるが (4.12) より

$$P(|X_t^x - x| > R) \le \frac{1}{R^2} E[|X_t^x - x|^2] \le \frac{2c}{R^2}(t + t^2)$$

したがって，$\| f \|_\infty \frac{2c}{R^2}(t+t^2) < \epsilon$ なるように R を十分大きくとっておけば

$$|P_t f(x)| < 2\epsilon, \quad x \in B_{2R}^c$$

これは，$\lim_{|x|\to\infty} P_t f(x) = 0$ を意味する．また $f \in \mathbf{C}_\infty$ であるから，$\forall\epsilon > 0$ に対して $|f(x) - f(x')| < \epsilon$, $|x - x'| < \delta$ なる δ をとる．このとき，$x, y \in R^N$ に対して

$$\begin{aligned} |P_t f(x) - P_t f(y)| &\le E[|f(X_t^x) - f(X_t^y)|] \\ &= E[|f(X_t^x) - f(X_t^y)|; |X_t^x - X_t^y| < \delta] \\ &\quad + E[|f(X_t^x) - f(X_t^y)|; |X_t^x - X_t^y| \ge \delta] \\ &\le \epsilon + 2 \| f \|_\infty P(|X_t^x - X_t^y| \ge \delta) \end{aligned}$$

であるが，$x, y \in B_{2R}$ のとき，定理 3.2.7 により，

$$\begin{aligned} P(|X_t^x - X_t^y| \ge \delta) &\le \frac{1}{\delta^2} E[|X_t^x - X_t^y|^2] \\ &\le \frac{c(R)}{\delta^2} |x - y|^2 \end{aligned}$$

より，$|x - y| < \frac{\delta}{(2c(R)\|f\|_\infty)^{\frac{1}{2}}} \epsilon^{\frac{1}{2}}$ ならば，$|P_t f(x) - P_t f(y)| < 2\epsilon$. したがって，上と合わせて $P_t f \in \mathbf{C}_\infty$ を得る．

ii) は自明であろう．

iii)
$$\begin{aligned} |P_t f(x) - f(x)| &\le E[|f(X_t^x) - f(x)|; |X_t^x - x| < \delta] \\ &\quad + E[|f(X_t^x) - f(x)|; |X_t^x - x| \ge \delta] \end{aligned}$$

より

$$\sup_{x \in R^N} |P_t f(x) - f(x)| \le \epsilon + 2 \| f \|_\infty \sup_{x \in R^N} P(|X_t^x - x| \ge \delta)$$

であるから，(4.12) とチェビシェフの不等式を使って iii) が示される．

iv) は (4.8) を使えば明らかであろう．■

上の命題の iv) の性質をもつ作用素を半群といい，特に $\mathbf{C}_\infty$ 上の強連続縮小半群（ i) –iv) の性質を満たすもの ）を Feller 半群という．一般に，推移確率 (4.9)

に対して定まる $\mathbf{C}_b$ （または $\mathbf{B}_b$ ）上の半群を 推移半群という．

4.3　L^2 半　　群

上では，確率微分方程式 (4.1) から Feller 半群が定まることを見たが，拡散過程に対応する半群を考える際には，$\mathbf{L}^2$ 空間で考えたほうが自然な場合がある．例として，3.3 節に現れた Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動 を考える．(3.31) で $N = m = 1$ とし，$\sigma \equiv 1$, $b(s) \equiv 0$, $A(s) \equiv -\frac{1}{2}a$, $a > 0$ とする．すなわち

$$X_t = x + B_t - \frac{1}{2}\int_0^t aX_s ds \tag{4.13}$$

を考える．(3.38) より，この解は

$$X_t = e^{-\frac{t}{2}a}x + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-s)a}dB_s \tag{4.14}$$

と表され，その分布は，平均 $e^{-\frac{t}{2}a}x$, 分散 $\int_0^t e^{-(t-s)a}ds = \frac{1}{a}(1-e^{-at})$ のガウス分布に従うから，その推移確率を $q(t,x,E)$ と表すとき，

$$q(t,x,E) = \int_E \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-at})}} e^{-a\frac{(y-e^{-\frac{t}{2}a}x)^2}{2(1-e^{-at})}} dy \tag{4.15}$$

したがって，

$$\begin{aligned} Q_t f(x) &= \int f(y)q(t,x,dy) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi(1-e^{-at})}} \int f(y)e^{-a\frac{(y-e^{-\frac{a}{2}t}x)^2}{2(1-e^{-at})}} dy \end{aligned} \tag{4.16}$$

と定義し，

$$m(dx) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx$$

とおくとき，

$$q(t,x,dy) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-at}}} e^{-\frac{a(e^{-at}x^2+e^{-at}y^2-2e^{-\frac{a}{2}t}xy)}{2(1-e^{-at})}} m(dy) \tag{4.17}$$

と表されることから

$$Q_t : \mathbf{L}^2(dm) \mapsto \mathbf{L}^2(dm) \tag{4.18}$$

$$\| Q_t f \|_2 \leq \| f \|_2, \quad f \in \mathbf{L}^2(dm) \tag{4.19}$$

$$(Q_t f, g)_m = (f, Q_t g)_m, \quad f, g \in \mathbf{L}^2(dm) \tag{4.20}$$

が容易に示される．ここで，

$$\| f \|_2 = \left(\int |f(x)|^2 m(dx)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(f, g)_m = \int f(x) g(x) m(dx)$$

である．すなわち，Q_t は $m(dx)$ に関して対称な $\mathbf{L}^2(dm)$ 上の縮小半群というわけである．

さて，一般に 推移確率 (4.9) から決まる推移半群 P_t:

$$P_t f(x) = \int_{R^N} P(t, x, dy) f(y), \quad f \in \mathbf{C}_b$$

はその定義から

$$0 \leq f \leq 1 \text{ ならば } 0 \leq P_t f \leq 1 \tag{4.21}$$

という性質をもつ．この性質をもつとき，半群はマルコフ的であるといわれる．また，$f \in \mathbf{C}_b(R^N)$ に対して

$$\lim_{t \to 0} P_t f(x) = f(x) \tag{4.22}$$

となることは容易にわかるが，m 対称性 (4.20) が あるラドン測度 $m(dx)$ に対して成り立てば，$\mathbf{L}^2$ 強連続性

$$\| P_t f - f \|_2 \to 0, \quad t \to 0$$

が示される．それを示しておこう．

【定理 4.3.1】 $m(dx)$ を R^N 上のラドン測度とする． $P_t : \mathbf{B}_b \mapsto \mathbf{B}_b$ を推移確率 (4.9) から決まる半群とする．この半群 が (4.20) を満たすとき, P_t の $\mathbf{L}^2(dm)$ 上への拡張 T_t は $\mathbf{L}^2$ 強連続縮小半群となる．

証明　まず，$f \in \mathbf{B}_b$ に対して

$$|P_t f(x)|^2 = |\int P(t,x,dy)f(y)|^2 \leq \int f(y)^2 P(t,x,dy) \int P(t,x,dy) = P_t|f|^2$$

に注意する．このことと，(4.20), (4.21) を使って，$f \in \mathbf{B}_b \cap \mathbf{L}^2(dm)$ について

$$\| P_t f \|_2^2 \leq \int P_t|f|^2(x)m(dx) = \int |f|^2 P_t 1 m(dx) \leq \| f \|_2^2 \tag{4.23}$$

を得るから，$f \in \mathbf{L}^2(dm)$ に対しても有界なもので近似することにより，(4.23) を得る．また，(4.22) より，$f \in \mathbf{C}_b(R^N) \cap \mathbf{L}^2(dm)$ に対して

$$\int |P_t f(x) - f(x)|^2 m(dx) \leq 2\int f^2(x)dm - 2\int (P_t f)(x)f(x)dm \to 0,\ \ t \to 0$$

であるから，$f \in \mathbf{L}^2(dm)$ に対しては，(4.23) を使って，強連続性を得る．■

4.4　コルモゴロフ方程式，粘性解

引き続き，(4.1) の解 X_t^x について考える．

$$u(s,x) = E_x[f(X_{T-s})] \tag{4.24}$$

とおくと 4.1 節で見たマルコフ性から

$$\begin{aligned} u(s,x) &= E_x[E_{X_{t-s}}[f(X_{T-t})]] \\ &= E_x[u(t,X_{t-s})] \end{aligned} \tag{4.25}$$

となる．ここで，$u(s,x) \in \mathbf{C}_b^{1,2}$ であると仮定すると，伊藤の公式により

$$\begin{aligned} u(t,X_{t-s}^x) - u(s,x) = &\int_0^{t-s} (\frac{\partial u}{\partial s} + Lu)(s+r, X_r^x)dr \\ &+ \sum_{i,j}\int_0^{t-s} \sigma_j^i(X_r^x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(s+r, X_r^x)dB_r^j \end{aligned}$$

であるが，(4.25) より

$$E_x[\int_0^{t-s} (\frac{\partial u}{\partial s} + Lu)(s+r, X_r)dr] = 0, \quad \forall t > s$$

を得る．$h = t - s$ とし，両辺を h で割って $h \to 0$ とすれば

$$(\frac{\partial u}{\partial s} + Lu)(s, x) = 0 \tag{4.26}$$

となる．この方程式をコルモゴロフ（の後ろ向き）方程式という．また L を (4.1) の解で決まる拡散過程の生成作用素とよぶが，数学的に正確に述べるには L を考える空間，その定義域を定める必要がある．このことに関しては第 6 章で考察する．また，(4.24) で定義された $u(s,x)$ が古典的な意味で (4.26) を満たすというときには，$u(s,x)$ が十分な滑らかさをもつことを，何らかの条件の下で示す必要があるが，それに関しては，[14] や [18] を参照されたい．

ここでは，(4.26) の解の概念を拡張することにより，緩やかな条件の下で，(4.24) で定義される $u(s,x)$ が (4.26) の解であることを主張する立場に立って，粘性解の概念を導入しておこう．粘性解の概念は非線形方程式にも通用する普遍的なものであり，現在問題となっている線形方程式に限るものではない．

$U \subset R^N$ を開集合とする．関数

$$F : [0,T) \times U \times R^N \times S^N \times R \mapsto R^1$$

を考える．ここで，S^N は N 次実対称行列全体とする．$X, Y \in S^N$ に対し，順序を，$\xi^* X \xi \le \xi^* Y \xi$, $\forall \xi \in R^N$ なるとき，$X \le Y$ と定義する．

【定義 4.4.1】 F が退化楕円型であるとは，次のときをいう．すなわち，$X \le Y$ ならば，$F(t,x,p,X,u) \ge F(t,x,p,Y,u)$, $\forall t \in [0,T)$, $x \in U$, $u \in R$, $p \in R^N$, $X, Y \in S^N$ となるとき．また F が単調であるとは，$u \le v$ ならば，$F(t,x,p,X,u) \le F(t,x,p,X,v)$ なるときをいう．

■ **例 4.1** ■ i) $a^{ij}(t,x)$ を非負定値対称行列，$c(t,x) \ge 0$, $a^{ij}(t,x)$, $b^i(t,x)$, $c(t,x)$, $g(t,x)$ は有界連続とする．このとき，$F(t,x,p,X,u) = -\sum_{i,j} a^{ij}(t,x)X_{ij} - \sum_i b^i(t,x)p_i + c(t,x)u - g(t,x)$ は退化楕円型である．また単調でもある．

ii) $a^{ij}(x,z)$ を非負定値対称行列，$c(x,z) \ge 0$, $a^{ij}(x,z)$, $b^i(x,z)$, $c(x,z)$, $g(x,z)$ が $R^N \times K$ 上 有界連続，ただし $K \subset R^m$ はコンパクト集合とする．このと

き，$F(t,x,p,X,u) \equiv F(x,p,X,u) = -\inf_{z\in K}\{\sum_{i,j} a^{ij}(x,z)X_{ij} + \sum_i b^i(x,z)p_i - c(x,z)u - g(x,z)\}$ は退化楕円型である．また単調である．

【定義 4.4.2】 連続関数 F が退化楕円型であるとする．$u \in \mathbf{C}([0,T)\times U)$ が

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + F(t,x,Du,D^2u,u) = 0 \tag{4.27}$$

の粘性劣解であるとは，次のときをいう．$\hat{u} \in \mathbf{C}^{1,2}([0,T)\times U)$ であり，$(\bar{t},\bar{x})$ において $u-\hat{u}$ の極大値 0 をとるならば，

$$-\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\bar{t},\bar{x}) + F(\bar{t},\bar{x},D\hat{u}(\bar{t},\bar{x}),D^2\hat{u}(\bar{t},\bar{x}),\hat{u}(\bar{t},\bar{x})) \le 0 \tag{4.28}$$

が成り立つとき．また粘性優解であるとは，$\hat{u} \in \mathbf{C}^{1,2}([0,T)\times U)$ であり，$(\bar{t},\bar{x})$ において，$u-\hat{u}$ の極小値 0 をとるならば，

$$-\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\bar{t},\bar{x}) + F(\bar{t},\bar{x},D\hat{u}(\bar{t},\bar{x}),D^2\hat{u}(\bar{t},\bar{x}),\hat{u}(\bar{t},\bar{x})) \ge 0$$

が成り立つときをいう．さらに，粘性優解でかつ粘性劣解であるとき，粘性解であるという．

まず，粘性解の概念が広義の最大値原理から来ていることを示しておこう．$u,\hat{u} \in \mathbf{C}^{1,2}([0,T)\times U)$ とし，$(\bar{t},\bar{x})$ が $u-\hat{u}$ の局所最大点とするとき，$D(u-\hat{u})(\bar{t},\bar{x}) = 0$，$D^2(u-\hat{u})(\bar{t},\bar{x}) \le 0$ であることに注意すれば，退化楕円性より

$$F(\bar{t},\bar{x},Du(\bar{t},\bar{x}),D^2u(\bar{t},\bar{x}),u(\bar{t},\bar{x})) \ge F(\bar{t},\bar{x},D\hat{u}(\bar{t},\bar{x}),D^2\hat{u}(\bar{t},\bar{x}),\hat{u}(\bar{t},\bar{x}))$$

であるから，u が (4.27) の古典劣解であるならば，$\hat{u}$ が (4.28) を満たすわけである．粘性劣解の概念は u が古典的な意味で微分可能でないときにも，試験関数 $\hat{u}$ が (4.27) を満たすこととして，解の概念を拡張しているわけである．また，u が粘性解であり，$u \in \mathbf{C}^{1,2}$ であるならば，古典解となっていることは定義より明らかである．

***!* 注意**　上のような試験関数 $\hat{u}$ が存在するような点は稠密にある．実際，各 $(\bar{t},\bar{x})$ に対して，$u(t,x) - \alpha|x-\bar{x}|^2 - \beta|t-\bar{t}|^2$ の $[0,T]\times\bar{U}$ での最大点を $(t_{\alpha,\beta},x_{\alpha,\beta})$ と

すると，$\alpha \to \infty, \beta \to \infty$ のとき，$(t_{\alpha,\beta}, x_{\alpha,\beta}) \to (\bar{t}, \bar{x})$ であるからである．

さて，粘性解の方法を用いて (4.26) を一般化した形で示しておこう．

X_t^x を (4.1) の解とし，

$$u(s,x) = E[\int_0^{T-s} e^{-\int_0^t c(X_r^x)dr} g(X_t^x)dt + e^{-\int_0^{T-s} c(X_r^x)dr} f(X_{T-s}^x)] \tag{4.29}$$

とおく．次の定理は，Feynman-Kac の公式を粘性解の立場で示したものである．

【定理 4.4.3】 (4.2) を仮定する．f, g, c は有界かつ一様連続で，$c(x) \geq 0$ とする．このとき，(4.29) で定義された $u(s,x)$ は

$$\begin{cases} -(\dfrac{\partial u}{\partial s} + (L-c)u)(s,x) = g(x), & [0,T) \times R^N \\ u(T,x) = f(x) \end{cases} \tag{4.30}$$

の粘性解である．

証明 まず，$u(s,x)$ が連続であることをみておく．定理 3.4.1 の証明において，

$$E[|X_s^x - X_{s'}^{x'}|^2] \leq k|s-s'| + k|x-x'|^2, \quad \exists k > 0$$

なることを示した．したがって，$\forall \delta > 0$ に対して

$$P(|X_s^x - X_{s'}^x| > \delta) \leq \frac{1}{\delta^2} E[|X_s^x - X_{s'}^x|^2] \leq \frac{k}{\delta^2}|s-s'|$$

同様に，

$$P(|X_s^x - X_s^{x'}| > \delta) \leq \frac{k}{\delta^2}|x-x'|^2$$

なることに注意する．

$$|u(s,x) - u(s',x')| \leq |u(s,x) - u(s,x')| + |u(s,x') - u(s',x')|$$

として，右辺のそれぞれの項について，c, f, g が有界かつ一様連続であることと，上で注意したことを使えば，$u(s,x)$ が連続であることは容易に示される．

次に，マルコフ性を用いると

$$u(s,x) = E[\int_0^{t-s} e^{-\int_0^r c(X_v^x)dv} g(X_r^x)dr + e^{-\int_0^{t-s} c(X_r^x)dr} u(t, X_{t-s}^x)] \qquad (4.31)$$

となることに注意しておく．$\hat{u} \in \mathbf{C}^{1,2}([0,T) \times R^N)$ とし，$(\bar{s}, \bar{x})$ は $u - \hat{u}$ の局所最大点で $u(\bar{s},\bar{x}) = \hat{u}(\bar{s},\bar{x})$ とするが，u は有界であるので，一般性を失わず，最大点になっているとしてよい．また，$\hat{u} \in \mathbf{C}_b^{1,2}([0,T) \times R^N)$ であるとしてよい．このとき，$u(s,x) \leq \hat{u}(s,x)$，$(s,x) \in [0,T) \times R^N$ であるから，(4.31) より，

$$\hat{u}(\bar{s},\bar{x}) \leq E[\int_0^{t-\bar{s}} e^{-\int_0^r c(X_v^{\bar{x}})dv} g(X_r^{\bar{x}})dr + e^{-\int_0^{t-\bar{s}} c(X_v^{\bar{x}})dv} \hat{u}(t, X_{t-\bar{s}}^{\bar{x}})]$$

したがって，伊藤の公式を使って

$$0 \leq E[\int_0^{t-\bar{s}} e^{-\int_0^r c(X_v^{\bar{x}})dv} \{g(X_r^{\bar{x}}) + (\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} + L\hat{u} - c\hat{u})(\bar{s}+r, X_r^{\bar{x}})\}dr]$$

$t - \bar{s}$ で両辺を割って，$t - \bar{s} \to 0$ として，

$$-(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} + L\hat{u} - c\hat{u})(\bar{s},\bar{x}) \leq g(\bar{x})$$

すなわち，u が (4.30) の粘性劣解であることが示された．粘性優解であることも同様に示される．■

！注意　i) 簡単のため f,g,c は有界一様連続としたが，f,g が高々多項式の増大度をもつ連続関数，c が非負連続有界関数として上の定理は成立する．補題 3.2.6 と定理 3.2.7 を使って，$u(s,x)$ の連続性が示されるからである．第5章においてより一般に考察する．

ii) 上の定理の条件を i) のように緩めた下で (4.30) の粘性解の一意性も成立している（付録参照）．

iii) 定理の条件の下で $g(x)$ が有界連続のとき，$\alpha > 0$ に対して

$$v(x) = E[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_s^x)ds]$$

が

$$(\alpha - L)v = g$$

の一意的な粘性解であることも同様に示される．

5

確率制御と数理ファイナンス

確率制御問題を定式化し，基本原理であるベルマン原理を証明する．ベルマン原理が半群性（西尾半群）を意味することを明らかにし，西尾半群の生成作用素に関する方程式であるベルマン方程式と値関数との関係が前章のコルモゴロフ方程式と拡散過程の推移半群との関係の一般化であることを，粘性解の方法を使って明らかにする．また最近の確率微分方程式の著しい応用として数理ファイナンスにおけるデリバティブの価格づけを取り上げる．

5.1　確率制御問題の定式化

確率微分方程式の重要な応用として確率制御問題を取り上げる．ここでは制御確率過程を確率微分方程式の解として定式化する．したがって，その係数に制御パラメータを含むものを考えることになる．$\Gamma \subset R^{N_1}$ を凸集合とし，Γ を制御領域とする確率制御問題を定式化する．以下でフィルター付き確率空間というとき，フィルトレーション $\mathcal{F}_t$ は右連続で (1.14) を満たしているものを考える．

【定義 5.1.1】 $\boldsymbol{\Gamma} = (\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t, B_t, \gamma_t)_{t \le T}$ が許容制御システムであるとは，次の条件を満たすときをいう．

i) $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ はフィルター付き確率空間である．

ii) $\{B_t\}$ は d 次元 $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動である．

iii) $\{\gamma_t\}$ は Γ 値 $\mathcal{F}_t$ 発展的可測確率過程であり，ある $M_\gamma > 0$ があって $|\gamma_t| \le M_\gamma$ なるものである．

許容制御システム全体を $\mathcal{A}d$ で表すことにする．

$$\sigma(x,\gamma): R^N \times \Gamma \mapsto R^N \otimes R^d$$
$$b(x,\gamma): R^N \times \Gamma \mapsto R^N$$

が与えられ，次の条件を満たしているものとする．

$$\| \sigma(x,\gamma_1) - \sigma(y,\gamma_2) \| + |b(x,\gamma_1) - b(y,\gamma_2)| \le K(|x-y| + \rho(|\gamma_1 - \gamma_2|)) \tag{5.1}$$

$$\| \sigma(x,\gamma) \|^2 + |b(x,\gamma)|^2 \le K(1+|x|^2) \tag{5.2}$$

ここで，$\rho : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ は連続関数で $\rho(0) = 0$ を満たすものとする．さて，$\{\gamma_t\}$ を制御とする次の確率微分方程式を考える．

$$X_t^x = x + \int_0^t \sigma(X_s^x, \gamma_s) dB_s + \int_0^t b(X_s^x, \gamma_s) ds \tag{5.3}$$

各制御 $\{\gamma_s\}$ に対し，$\tilde{\sigma}(s,x,\omega) = \sigma(x,\gamma_s(\omega))$, $\tilde{b}(s,x,\omega) = b(x,\gamma_s(\omega))$ とおけば，$\tilde{\sigma}, \tilde{b}$ が定理 3.2.1 の条件を満たしていることがわかるので，(5.3) は一意解 $X = \{X_t^x\}$ をもつ．この X を制御 $\{\gamma_s\}$ に対する応答とよぶ．補題 3.2.6 および定理 3.2.7 によれば，各応答は次の評価を満たすことがわかる．

$$E[\sup_{0\le s\le t} |X_s^x - x|^{2q}] \le M(1+|x|^{2q})t^q, \quad \forall q \ge 1 \tag{5.4}$$

$$E[\sup_{0\le s\le t} |X_s^x - X_s^y|^{2q}] \le M|x-y|^{2q}, \quad \forall q \ge 1 \tag{5.5}$$

ただし，$M = M(K,q,T)$．また，(5.4) から

$$E[\sup_{0\le s\le t} |X_s^x|^{2q}] \le M(1+|x|^{2q})t^q + M'|x|^{2q} \tag{5.4$'$}$$

であることに注意しよう．

さて，$f(x,\gamma): R^N \times \Gamma \mapsto R^1$, $c(x,\gamma): R^N \times \Gamma \mapsto R^1$, $\varphi(x): R^N \mapsto R^1$ が次の条件を満たしているとする．

$$|\varphi(x)| + |f(x,\gamma)| \le K(1+|x|^{2m}), \quad m > 0 \tag{5.6}$$

$$0 \le c(x,\gamma) \le K \tag{5.7}$$

$$f(x,\gamma),\ c(x,\gamma) \text{ は } (x,\gamma) \text{ についての連続で，} x \text{ についての連続性は } \gamma \text{ によらない．} \varphi \text{ は連続．} \tag{5.8}$$

上で与えられた f, c, φ に応じて，有限区間 $[0,T]$ 上での確率制御問題を考察するにあたって，各 $0 \le t \le T$ に対して値関数 $v(t,x)$ を導入する．

$$v(t,x) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{A}d} E\left[\int_0^{T-t} e^{-c_s^{x,\gamma}} f(X_s^x, \gamma_s) ds + e^{-c_{T-t}^{x,\gamma}} \varphi(X_{T-t}^x)\right] \tag{5.9}$$

ここで，$c_s^{x,\gamma} = \int_0^s c(X_u^x, \gamma_u) du$ である．また inf はあらゆる許容制御システムのとり方を考えて，その中での下限をとるが，制御は $\{\gamma_s\}$ であるので，$\inf_{\Gamma \in \mathcal{A}d}$ のかわりに，$\inf_{\gamma_\cdot}$ と書くこともある．しかしながら，値関数は確率空間やブラウン運動のとり方によらないものであり，上のように表すのが正確なのである．

さて，定義 5.1.1 におけるフィルター付き確率空間が次のものになっている状況を考える．

$\Omega = W^N$, $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t(W^N)$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t}(\mathcal{B}_s \vee \mathcal{N})$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_T \vee \mathcal{N}$, $\mathcal{N} = \{A \subset \Omega;\ \exists B \in \mathcal{B}_T, \text{s.t. } A \subset B, P(B) = 0\}$, $\{B_t\}$ は $\mathcal{F}_t$ ブラウン運動．このとき，$\lambda_t(\omega) : [0,T] \times \Omega \mapsto \Gamma$ を $\mathcal{B}_t$ 発展的可測確率過程とする．確率微分方程式

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s, \lambda_s(X_\cdot)) dB_s + \int_0^t b(X_s, \lambda_s(X_\cdot)) ds \tag{5.10}$$

が少なくとも一つ解をもつとき，$\omega \mapsto X_\cdot^x(\omega) \in \Omega$ は $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}_t$ 可測なので $\gamma_t(\omega) = \lambda_t(X_\cdot^x(\omega))$ として γ を定義すると，γ_t は $\mathcal{F}_t$ 発展的可測であり，許容制御システム $\Gamma_x = (\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t, B_t, \gamma_t)$ を定義する．このような制御システムを標準的許容制御システムとよび，その全体を $\mathcal{C}_x$ で表す．定数制御 $\lambda_s \equiv \gamma \in \Gamma$ は明らかに標準的許容制御システムを定義する．また関数$\lambda : [0,T] \times R^N \mapsto \Gamma$ がボレル可測であるとし，$\lambda_t(\omega) := \lambda(t, \omega(t))$ とすれば λ_t は $\mathcal{B}_t$ 発展的可測であり，この λ に対して (5.10) が少なくとも一つ解をもつとき，標準的許容制御システムが定義される．この λ_t をマルコフ制御とよぶ．それによって決まるマルコフ許容制御システム全体を $\mathcal{M}_x$，定数制御全体から決まるシステム全体を $\mathcal{MC}_x$ と表す．このとき，$\mathcal{MC}_x \subset \mathcal{M}_x \subset \mathcal{C}_x \subset \mathcal{A}d$ である．

さて，確率制御の基本原理であるベルマン原理は (5.9) で定義された値関数 $v(t,x)$ を使って次のように表される．

$$v(s,x) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{A}d} E[\int_0^{t-s} e^{-c_r^{x,\gamma}} f(X_r^x, \gamma_r)dr + e^{-c_{t-s}^{x,\gamma}} v(t, X_{t-s}^x)] \tag{5.11}$$

ここで，$0 \leq s \leq t \leq T$. (5.11) から形式的に導かれるベルマン方程式（Hamilton–Jacobi–Bellman）は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \inf_{\gamma \in \Gamma}\{L^\gamma v(t,x) + f(x,\gamma)\} = 0, \ [0,T) \times R^N, \quad v(T,x) = \varphi(x) \tag{5.12}$$

ここで，

$$L^\gamma v = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(x,\gamma)D_{ij}v + \sum_i b^i(x,\gamma)D_i v - c(x,\gamma)v$$

$a^{ij} = (\sigma\sigma^*)^{ij}$. ベルマン原理 (5.11) を示すこと，さらに，値関数がベルマン方程式 (5.12) を粘性解の意味で満たすことを示すのがここでの主な目的である．そのために，次の量を用意する．

$$Q(t)\varphi(x) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{A}d} E[\int_0^t e^{-c_s^{x,\gamma}} f(X_s^x, \gamma_s)ds + e^{-c_t^{x,\gamma}} \varphi(X_t^x)] \tag{5.13}$$

この $Q(t)$ を用いれば (5.11) は

$$Q(T-s)\varphi(x) = Q(t-s)Q(T-t)\varphi(x)$$

ということであり，t をパラメータとする作用素の族とみたとき，$Q(t)$ が半群の性質をもっていることが示されれば，ベルマン原理が証明されるということになる．$Q(t)$ の定義域を適当な空間に限定し，そこで $Q(t)$ の生成作用素を考察するとき，ベルマン方程式はその作用素に関する方程式であることが示される（[33] 参照)．一方 (5.12) の解の概念を粘性解の意味でとらえるとき，$v(t,x)$ が (5.12) を満たすことが十分一般的な状況で示される．その証明においてベルマン原理が本質的に重要な役割を果たす．

5.2　ベルマン方程式の古典解

まず，(5.12) の古典解と値関数の一般的な関係を示しておく．

【定理 5.2.1】 $u \in \mathbf{C}^{1,2}([0,T)\times R^N)\cap\mathbf{C}([0,T]\times R^N)$ が (5.12) を満たし，$|u(t,x)| \le M(1+|x|^{2m})$ とする．このとき，$u(t,x) \le v(t,x), \forall t,x$ である．

証明　許容制御システム $\mathbf{\Gamma} = (\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t, B_t, \gamma_t)$ をとり，制御 γ_t に対する応答を $\{X_t^x\}$ とする．伊藤の公式により，

$$
\begin{aligned}
&u(t+s, X_s^x)e^{-c_s^{x,\gamma}} - u(t,x)\\
&\quad = \int_0^s \left(\frac{\partial u}{\partial t} + L^{\gamma_r}u\right)(t+r, X_r^x)e^{-c_r^{x,\gamma}}\,dr\\
&\qquad + \sum_{i,j}\int_0^s \sigma_j^i(X_r^x, \gamma_r)D_i u(t+r, X_r^x)e^{-c_r^{x,\gamma}}\,dB_r^j
\end{aligned}
$$

したがって，$T_R = (T-t)\wedge\tau_R$,

$$
\tau_R = \begin{cases} \inf\{t; |X_t^x| \ge R\}, & \{\} \ne \emptyset \\ \infty, & \{\} = \emptyset \end{cases}
$$

とするとき，u が (5.12) を満たすことを使うと

$$
\begin{aligned}
&u(t,x)\\
&= E\Big[-\int_0^{T_R}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + L^{\gamma_r}u\right)(t+r, X_r^x)e^{-c_r^{x,\gamma}}\,dr + u(t+T_R, X_{T_R}^x)e^{-c_{T_R}^{x,\gamma}}\Big]\\
&\le E\Big[\int_0^{T_R} f(X_r^x, \gamma_r)e^{-c_r^{x,\gamma}}\,dr + \varphi(X_{T-t}^x)e^{-c_{T-t}^{x,\gamma}}1_{\{T-t\le\tau_R\}}\\
&\quad + u(t+\tau_R, X_{\tau_R}^x)e^{-c_{\tau_R}^{x,\gamma}}1_{\{\tau_R<T-t\}}\Big]
\end{aligned}
$$

$(5.4)'$ から

$$
R^{2q}P(\sup_{0\le s\le t}|X_s^x| \ge R) \le E[\sup_{0\le s\le t}|X_s^x|^{2q}] \le c \equiv c(K,q,T,x)
$$

となり，$P(\tau_R < T-t) \to 0,\ R \to \infty$ なることがわかるので f, u の条件と $(5.4)'$ から

$$
u(t,x) \le E\Big[\int_0^{T-t} f(X_r^x, \gamma_r)e^{-c_r^{x,\gamma}}\,dr + \varphi(X_{T-t}^x)e^{-c_{T-t}^{x,\gamma}}\Big]
$$

が各 $\{\gamma_t\}$ に対して成立することがわかるので $u(t,x) \le v(t,x)$.　■

! 注意　i)　上の条件の下で，各 $\epsilon > 0$ に対し，ボレル可測関数 $\gamma_\epsilon(t,x)$ が存在し，

$$L^{\gamma_\epsilon(t,x)}u(t,x) + f(x,\gamma_\epsilon(t,x)) - \epsilon \le \inf_{\gamma\in\Gamma}\{L^\gamma u(t,x) + f(x,\gamma)\}$$

とできることが示されるが，さらに，もし

$$X_s^x = x + \int_0^s \sigma(X_s^x, \gamma_\epsilon(t+s, X_s^x))dB_s + \int_0^s b(X_s^x, \gamma_\epsilon(t+s, X_s^x))ds$$

が解をもつならば，$\gamma_\epsilon(s) \equiv \gamma_\epsilon(t+s, X_s^x)$ をマルコフ制御とする許容制御システムが定義され，このとき上の証明と同様に伊藤の公式を用いることにより，$u(t,x) \ge v(t,x)$ となることがわかる．したがって $u(t,x) = v(t,x)$．マルコフ制御の構成については [23] 5 章 参照．

ii) 次に掲げる重要な例は，定義 5.1.1 iii) と (5.2), (5.6) を満たさない．そこで，それらの条件を修正してその例に適用できるようにしておこう．すなわち，定義 5.1.1 iii) の条件を

iii)′
$$\forall q \ge 1,\ \exists M > 0 \text{ s.t. } E[\int_0^T |\gamma_s|^{2q}ds] \le M$$

とおきかえる．そうした制御システム全体を $\tilde{A}d$ と表す．また (5.2), (5.6) を次でおきかえる．

$$\| \sigma(x,\gamma) \|^2 + |b(x,\gamma)|^2 \le K(1+|x|^2+|\gamma|^2) \tag{5.2$'$}$$

$$\nu|\gamma|^2 \le f(x,\gamma) \le K(|x|^2+|\gamma|^2),\ 0 \le \varphi \le K|x|^2,\ \exists \nu, K > 0 \tag{5.6$'$}$$

と仮定する．このとき，(5.3) で決まる γ_t に対する応答は 補題 3.2.6 および定理 3.2.7 によれば次の評価を満たす．

$$E[\sup_{0\le s\le t} |X_s^x - x|^{2q}] \le Ke^{Kt}t^{q-1}\int_0^t \{1+|x|^{2q} + E[|\gamma_s|^{2q}]\}ds \tag{5.4$''$}$$

$$E[\sup_{0\le s\le t} |X_s^x - X_s^y|^{2q}] \le Ke^{Kt}|x-y|^{2q} \tag{5.5$'$}$$

Y_t^x を $\gamma_s \equiv 0$ に対する応答とし，

$$M_x = E[\int_0^T K|Y_t^x|^2 dt + K\sup_{0\le t\le T}|Y_t^x|^2]$$

とおく．そして，$E[\int_0^T \nu|\gamma_s|^2 ds] \leq M_x$, を満たす制御システム全体を $\tilde{A}d_{x,T}$ とおけば

$$v(t,x) = \inf_{\tilde{A}d} E[\int_0^{T-t} f(X_s^x, \gamma_s)ds + \varphi(X_{T-t}^x)]$$

$$= \inf_{\tilde{A}d_{x,T}} E[\int_0^{T-t} f(X_s^x, \gamma_s)ds + \varphi(X_{T-t}^x)] \tag{5.14}$$

となることに注意する．

■ **例 5.1** ■ LQG(Linear Quadratic Gaussian) 制御

$\Gamma = R^{N_1}$, $\sigma(x,\gamma) \equiv \sigma$, $b(x,\gamma) = Ax + C\gamma$, $f(x,\gamma) = \frac{1}{2}x^*Rx + \frac{1}{2}\gamma^*S\gamma$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^*Ux$, $c(x,\gamma) = 0$, ここで，σ ; A, R, U; C; S はそれぞれ $N\times d$, $N\times N$, $N\times N_1$, $N_1 \times N_1$ 定数行列 で R, U は非負定値，S は正定値である．すなわち，制御確率微分方程式は

$$dX_t = \sigma dB_t + (AX_t + C\gamma_t)dt, \quad X_0 = x$$

であり，値関数は

$$v(t,x) = \inf_{\tilde{A}d} E[\int_0^{T-t} (\frac{1}{2}(X_s^x)^*RX_s + \frac{1}{2}\gamma_s^*S\gamma_s)ds + \frac{1}{2}(X_{T-t}^x)^*UX_{T-t}^x]$$

このとき，対応するベルマン方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}D_{ij}u + (Ax)^*\nabla u + \inf_{\gamma\in R^{N_1}}\{(C\gamma)^*\nabla u + \frac{1}{2}\gamma^*S\gamma\} + \frac{1}{2}x^*Rx = 0 \tag{5.15}$$

$$u(T,x) = \frac{1}{2}x^*Ux$$

であるが，(5.15) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}D_{ij}u + (Ax)^*\nabla u - \frac{1}{2}(\nabla u)^*(CS^{-1}C^*)\nabla u + \frac{1}{2}x^*Rx = 0 \tag{5.16}$$

と表される．(5.15) は $\hat{u}(t,x) = \frac{1}{2}x^*P(t)x + G(t)$ の形の下に有界な解をもつ．ここで，$P(t)$ は行列リッカチ方程式

$$\dot{P}(t) + PA + A^*P - PCS^{-1}C^*P + R = 0, \quad P(T) = U \tag{5.17}$$

の解であり，$G(t)$ は

$$\dot{G}(t)+\frac{1}{2}\operatorname{tr}(Pa)=0,\quad G(T)=0 \tag{5.18}$$

の解である．(5.15) における inf が $\gamma(t,x)=-S^{-1}C^{*}\nabla\hat{u}(t,x)$ で実現されることに注意する．確率微分方程式

$$\hat{Y}_s=x+\sigma B_s+\int_0^s(A\hat{Y}_r-CS^{-1}C^{*}P(t+r)\hat{Y}_r)dr$$

をとり，$\hat{\gamma}_s=-S^{-1}C^{*}P(t+s)\hat{Y}_s$ とおけば，(5.15), (5.17) と伊藤の公式を使って

$$\hat{u}(t,x)=E[\int_0^{T-t}\{\frac{1}{2}\hat{Y}_s^{*}R\hat{Y}_s+\frac{1}{2}\hat{\gamma}_s^{*}S\hat{\gamma}_s\}ds+\frac{1}{2}\hat{Y}_{T-t}^{*}U\hat{Y}_{T-t}]$$

がわかり，$\hat{\gamma}_s$ が iii)$'$ を満たすことがわかるので，

$$\hat{u}(t,x)\geq v(t,x)$$

また，(5.14) に注意すれば 定理 5.2.1 がこの場合にも適用できることがわかるので，$\hat{u}(t,x)\leq v(t,x)$．したがって

$$\hat{u}(t,x)=v(t,x)$$

最適制御は $\hat{\gamma}_s=-S^{-1}C^{*}P(t+s)\hat{Y}_s$ というわけである．

5.3 ベルマン原理

【補題 5.3.1】 (5.1)-(5.2), (5.6)-(5.8) の仮定の下で

i) $|Q(t)\varphi(x)|\leq M(1+|x|^{2m})$

ii) $Q(t)\varphi(x)$ は各 t に対して x の連続関数でその連続性は $t\in[0,T]$ によらない．

iii) $Q(t)\varphi(x)$ は各 x に対して t の連続関数で，その連続性は各コンパクト集合上の x に関して一様である．

証明 i)

$$q(x,t,\gamma,\varphi):=\int_0^t e^{-c_s^{x,\gamma}}f(X_s^x,\gamma_s)ds+e^{-c_t^{x,\gamma}}\varphi(X_t^x)$$

とおく．仮定より，

$$|q(x,t,\gamma,\varphi)| \le M\int_0^t (1+|X_s^x|^{2m})ds + M(1+|X_t^x|^{2m})$$

であるから $(5.4)'$ を使って $|Q(t)\varphi(x)| \le M(1+|x|^{2m})$.

ii) $x, y \in B_r$, $r>0$ とする．また，$A_x(R) = \{\omega; \sup_{0\le s\le T}|X_s^x| \ge \frac{R}{2}\}$, $R>0$ とおく．

$$\begin{aligned}
&|E[q(x,t,\gamma,\varphi) - q(y,t,\gamma,\varphi)]| \\
&\quad \le E[|q(x,t,\gamma,\varphi) - q(y,t,\gamma,\varphi)|; A_x(R)\cup A_y(R)] \\
&\qquad + E[|q(x,t,\gamma,\varphi) - q(y,t,\gamma,\varphi)|; A_x(R)^c \cap A_y(R)^c] \\
&\quad \le E[|q(x,t,\gamma,\varphi)| + |q(y,t,\gamma,\varphi)|; A_x(R)\cup A_y(R)] \\
&\qquad + E[|q(x,t,\gamma,\varphi) - q(y,t,\gamma,\varphi)|; A_x(R)^c] \equiv J_1 + J_2
\end{aligned}$$

シュワルツの不等式を使って，

$$\begin{aligned}
E[|q(x,t,\gamma,\varphi)|; A_x(R)] &\le E[|q(x,t,\gamma,\varphi)|^2]^{\frac{1}{2}} P(A_x(R))^{\frac{1}{2}} \\
&\le M(1+|x|^{2m})(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} R^{-1} \\
&\le M(1+r^{2m})(1+r^2)^{\frac{1}{2}} R^{-1}
\end{aligned}$$

が $(5.4)'$ からわかる．同様の計算をして，$J_1 \le M(1+r^{2m})(1+r^2)^{\frac{1}{2}}R^{-1}$．したがって，$\forall\epsilon>0$ に対して R を十分大きくとっておけば $J_1 < \epsilon$ とできる．この R に対して，$|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in B_R$ ならば

$$|f(x_1,\gamma) - f(x_2,\gamma)| + |c(x_1,\gamma) - c(x_2,\gamma)| + |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \epsilon$$

となるように δ をとる．

$$\begin{aligned}
J_2 = {} & E[|q(x,t,\gamma,\varphi) - q(y,t,\gamma,\varphi)|; \sup_{0\le s\le T}|X_s^x - X_s^y| < \delta,\ A_x(R)^c] \\
& + E[|q(x,t,\gamma,\varphi) - q(y,t,\gamma,\varphi)|; \sup_{0\le s\le T}|X_s^x - X_s^y| \ge \delta,\ A_x(R)^c] \\
\le {} & M(1+r^{2m})\epsilon
\end{aligned}$$

$$+ME[\int_0^t (1+|X_s^x|^{2m}+|X_s^y|^{2m})ds; \sup_{0\le s\le T}|X_s^x - X_s^y| \ge \delta]$$
$$+ME[(1+|X_t^x|^{2m}+|X_t^y|^{2m}); \sup_{0\le s\le T}|X_s^x - X_s^y| \ge \delta]$$
$$\le M(1+r^{2m})\epsilon + M(1+r^{2m})P(\sup_{0\le s\le T}|X_s^x - X_s^y| \ge \delta)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le M(1+r^{2m})(\epsilon + \frac{|x-y|}{\delta})$$

したがって，$|x-y| < \delta\epsilon = \delta_1$ ととっておけば，$|x-y| < \delta_1$, $x, y \in B_r$に対して $|E[q(x,t,\gamma,\varphi) - q(y,t,\gamma,\varphi)]| < M\epsilon$ がわかる．

iii) $E[|q(x,t,\gamma,\varphi) - q(x,s,\gamma,\varphi)|]$
$$\le E[\int_s^t |f(X_u^x,\gamma_u)|du + |\varphi(X_t^x) - \varphi(X_s^x)| + |\varphi(X_s^x)|\int_s^t |c(X_u^x,\gamma_u)|du]$$
$$\le M(1+|x|^{2m})|t-s| + E[|\varphi(X_t^x) - \varphi(X_s^x)|]$$

$$E[|\varphi(X_t^x) - \varphi(X_s^x)|]$$
$$\le E[|\varphi(X_t^x) - \varphi(X_s^x)|; |X_t^x - X_s^x| \ge \delta, A_x(R)^c]$$
$$+ E[|\varphi(X_t^x) - \varphi(X_s^x)|; |X_t^x - X_s^x| < \delta, A_x(R)^c]$$
$$+ E[|\varphi(X_t^x) - \varphi(X_s^x)|; A_x(R)]$$

であり，$X_t^x = X_{t-s}^{X_s^x}$ であることに注意して，(5.4) を導いたのと同様にして

$$E[\sup_{0\le t-s\le\lambda}|X_t^x - X_s^x|^{2q}] \le M(1+|x|^{2q})\lambda^q$$

が得られるので $\forall\epsilon > 0$ に対して $\exists\delta_1 > 0$ で

$$E[|q(x,t,\gamma,\varphi) - q(x,s,\gamma,\varphi)|] < M\epsilon, \quad |t-s| < \delta_1,\ x \in B_r$$

となることが上と同様にしてわかる．■

【定理 5.3.2】 補題 5.3.1 の条件の下で

$$Q(t+s)\varphi(x) = Q(t)Q(s)\varphi(x) = Q(s)Q(t)\varphi(x)$$

証明 まず,

$$Q(t+s)\varphi(x) \geq Q(t)Q(s)\varphi(x) \tag{5.19}$$

を示す. $\mathbf{\Gamma} = (\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t, B_t, \gamma_t) \in \mathcal{A}d$ とし,

$$\gamma_k(t,\omega) = \frac{1}{k}\int_{t-k}^{t} \gamma(s,\omega)ds$$

とおくとき, $\gamma_k \in \Gamma$ で $|\gamma_k| \leq M_\gamma$ であるから $\mathbf{\Gamma}$ の γ を γ_k でおきかえたものも $\mathcal{A}d$ に属する.

$$X_k^x(t) = x + \int_0^t \sigma(X_k^x(s), \gamma_k(s))dB_s + \int_0^t b(X_k^x(s), \gamma_k(s))ds$$

とし, $\sigma^{(1)}(s,x,\omega) = \sigma(x,\gamma(s,\omega))$, $\sigma^{(2)}(s,x,\omega) = \sigma(x,\gamma_k(s,\omega))$, $b^{(1)}(s,x,\omega) = b(x,\gamma(s,\omega))$, $b^{(2)}(s,x,\omega) = b(x,\gamma_k(s,\omega))$, とおくとき, 定理 3.2.7 より,

$$\begin{aligned}
&E[\sup_{0\leq t\leq T} |X^x(t) - X_k^x(t)|^{2q}] \\
&\leq c_1 E[\int_0^T |b(X_k^x(s),\gamma(s)) - b(X_k^x(s),\gamma_k(s))|^{2q} ds] \\
&\quad + c_1 E[\int_0^T \| \sigma(X_k^x(s),\gamma(s)) - \sigma(X_k^x(s),\gamma_k(s)) \|^{2q} ds] \\
&\leq c_1 E[\int_0^T \rho(|\gamma(s) - \gamma_k(s)|)^{2q} ds]
\end{aligned}$$

また,

$$\lim_{k\to 0} \gamma_k(s) = \gamma(s), \quad \text{a.e. } s,\ \forall\omega \tag{5.20}$$

$$\lim_{k\to 0} \int_0^T \rho(|\gamma(s) - \gamma_k(s)|)^{2q} ds = 0,\ \forall\omega$$

よって,

$$\lim_{k\to 0} E[\sup_{0\leq t\leq T} |X^x(t) - X_k^x(t)|^{2q}] = 0,\ \ \forall q \geq 1 \tag{5.21}$$

したがって,

$$q_k(x,t,\gamma_k,\varphi) = \int_0^t e^{-c_s^{x,\gamma_k}} f(X_k^x(s),\gamma_k(s))ds + e^{-c_t^{x,\gamma_k}} \varphi(X_k^x(t))$$

とおけば，補題 5.3.1 と同様の議論と (5.20), (5.21) を用いて

$$\lim_{k\to\infty} E[q_k(x,t,\gamma_k,\varphi)] = E[q(x,t,\gamma,\varphi)] \tag{5.22}$$

が得られる（問 5.1 参照）．さて，$W^{N+N_1} = \mathbf{C}([0,T];R^{N+N_1})$, $\mathcal{B}_t$ を W^{N+N_1} の筒集合から生成される σ 加法族とし，$\hat{P}$ を (X_k^x,γ_k) の誘導する $(W^{N+N_1},\mathcal{B}_T)$ 上の確率測度とする．$\hat{\mathcal{N}} = \{B \subset W^{N+N_1}; \exists A \in \mathcal{B}_T, \text{s.t. } B \subset A,\ \hat{P}(A) = 0\}$ とし，$\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{B}_{t+} \vee \hat{\mathcal{N}}$ とする．このとき，$w \in W^{N+N_1}$ に対してその座標写像を $w(t) = (\hat{X}_k(t,w),\hat{\gamma}_k(t,w))$ とすると $\hat{\mathcal{F}}_t$ ブラウン運動 $\hat{B}_t$ があって，$\hat{X}_k(t,w)$ は $\hat{P}$ の下で $\hat{\gamma}_k(t,w)$ に対する応答となっている．$\tilde{X}_k(u) = \hat{X}_k(t+u)$, $\tilde{\gamma}_k(u) = \hat{\gamma}_k(t+u)$ とおく．$(W^{N+N_1},\mathcal{B}_T)$ は標準可測空間であるので $\mathcal{B}_t$ に対して，正則条件付き確率 $\hat{P}_t(w,B) : W^{N+N_1} \times \mathcal{B}_T \mapsto [0,1]$ があり，

$$\begin{aligned}
\hat{E}[q_k(x,t+s,\hat{\gamma}_k,\varphi)] &= \hat{E}[\int_0^t f(\hat{X}_k(u),\hat{\gamma}_k(u))e^{-c_u^{x,\hat{\gamma}_k}}du] \\
&\quad + \hat{E}[\hat{E}[\int_t^{t+s} f(\hat{X}_k(u),\hat{\gamma}_k(u))e^{-c_u^{x,\hat{\gamma}_k}}du + \varphi(\hat{X}_k(t+s))e^{-c_{t+s}^{x,\hat{\gamma}_k}}|\mathcal{B}_t]] \\
&= \hat{E}[\int_0^t f(\hat{X}_k(u),\hat{\gamma}_k(u))e^{-c_u^{x,\hat{\gamma}_k}}du] \\
&\quad + \hat{E}[\int \hat{P}_t(w,dw')\{\int_0^s f(\tilde{X}_k(u),\tilde{\gamma}_k(u))e^{-c_u^{\tilde{x},\tilde{\gamma}_k}}du + \varphi(\tilde{X}_k(s))e^{-c_s^{\tilde{x},\tilde{\gamma}_k}}\}]
\end{aligned}$$

ここで，$w'(\cdot) = (\tilde{X}_k(\cdot),\tilde{\gamma}_k(\cdot)) \in W^{N+N_1}$, $\tilde{x} = \tilde{X}_k(0)$. $\tilde{\mathcal{F}}_r = \hat{\mathcal{F}}_{t+r}$, $\tilde{B}_r = \hat{B}(t+r) - \hat{B}(t)$ とおくと，$\tilde{B}_r$ は $\hat{P}_t(w,\cdot)$ に関して$\tilde{\mathcal{F}}_r$ ブラウン運動であり，

$$\tilde{X}_k(r) = \hat{X}_k(t) + \int_0^r \sigma(\tilde{X}_k(u),\tilde{\gamma}_k(u))d\tilde{B}_u + \int_0^r b(\tilde{X}_k(u),\tilde{\gamma}_k(u))du$$

したがって，$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_k = (W^{N+N_1},\hat{\mathcal{F}}_T,\hat{P}_t(w,\cdot);\tilde{\mathcal{F}}_r,\tilde{B}_r,\tilde{\gamma}_k(r))$ とおくと $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_k \in \mathcal{A}d$ a.s. で $\tilde{X}_k$ は $\tilde{\gamma}_k$ の応答となっている．したがって

$$\int \hat{P}_t(w,dw')q_k(\hat{X}_k(t),s,\tilde{\gamma}_k,\varphi) \geq Q(s)\varphi(\hat{X}_k(t)) \text{ a.s.}$$

ゆえに，

$$\hat{E}[q_k(x,t+s,\hat{\gamma}_k,\varphi)] \geq \hat{E}[\int_0^t f(\hat{X}_k(u),\hat{\gamma}_k(u))e^{-c_u^{x,\gamma_k}}du + Q(s)\varphi(\hat{X}_k(t))]$$

$k \to 0$ として，(5.22) より，

$$E[q(x,t+s,\gamma,\varphi)] \geq E[q(x,t,\gamma,Q(s)\varphi)], \;\; \forall\gamma$$

だから $Q(t+s)\varphi(x) \geq Q(t)Q(s)\varphi(x)$.

次に，逆の不等式 $Q(t+s)\varphi(x) \leq Q(t)Q(s)\varphi(x)$ を示そう．補題 5.3.1 より，$\forall\epsilon > 0$, に対して $\exists\delta = \delta(\epsilon, R)$ があり，

$$|Q(s)\varphi(x_1) - Q(s)\varphi(x_2)| < \epsilon, \quad |x_1 - x_2| < \delta, \;\; x_1, x_2 \in B_R \tag{5.23}$$

である．$\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{A}d$ に対する応答 $X^x(t)$ についてあらかじめ R を十分大きくとっておけば (5.4) より，

$$P(X^x(t) \in \bar{B}_R) \geq 1 - \epsilon \tag{5.24}$$

とできる．この R は $\mathbf{\Gamma}$ によらない．U_i, $i = 1,2,\cdots,n$ を $B_R \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, $|U_i| < \delta$, $U_i \cap U_j = \emptyset, i \neq j$ ととり，$U^* = (\bigcup_{i=1}^n U_i)^c$ とする．ここで，$|U_i|$ は U_i の直径．$i = 1,2,\cdots,n+1$ に対してフィルター付き確率空間 $(\Omega_i, \mathcal{F}^i, P^i; \mathcal{F}_t^i)$ とその上のブラウン運動 $\{B_i(t)\}$, Γ 値 $\mathcal{F}_t^i$ 発展的可測過程 $\{\gamma_i(t)\}$ を用意する．$\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n+1}$, $\tilde{\mathcal{F}}_r = \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_r^n \otimes \mathcal{F}_r^{n+1}$ とおき，$(B(t),\gamma(t)),(B_1(t),\gamma_1(t)),\cdots,(B_{n+1}(t),\gamma_{n+1}(t))$ が $\tilde{P}$ の下で独立になるようにしておく．

$$\tilde{\gamma}(r) = \begin{cases} \gamma(r), & r < t \\ \sum_{i=1}^n \gamma_i(r-t)1_{U_i}(X^x(t)) + \gamma_{n+1}(r-t)1_{U^*}(X^x(t)), & r \geq t \end{cases}$$

$$\tilde{B}(r) = \begin{cases} B(r), & r < t \\ \sum_{i=1}^n B_i(r-t)1_{U_i}(X^x(t)) + B_{n+1}(r-t)1_{U^*}(X^x(t)), & r \geq t \end{cases}$$

ととると $\tilde{B}(r)$ は $\tilde{P}$ の下で $\tilde{\mathcal{F}}_r$ ブラウン運動である（問 5.2 参照）．したがって，$\tilde{\mathbf{\Gamma}} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}; \tilde{\mathcal{F}}_r, \tilde{B}_r, \tilde{\gamma}_r) \in \mathcal{A}d$ である．また，

$$\hat{X}_i(r) = X^x(t) + \int_0^r \sigma(\hat{X}_i(s),\gamma_i(s))dB_i(s) + \int_0^r b(\hat{X}_i(s),\gamma_i(s))ds$$

$i = 1, 2, \cdots, n+1$,

$$\tilde{X}(r) = \begin{cases} X^x(r), & r \le t \\ \sum_{i=1}^{n} \hat{X}_i(r-t) 1_{U_i}(X^x(t)) + \hat{X}_{n+1}(r-t) 1_{U^*}(X^x(t)), & r > t \end{cases}$$

とおけば $\tilde{X}(r)$ は $\tilde{\gamma}(r)$ の応答となっている．$x_i \in U_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$ をとり，$\gamma_i(t)$ を

$$E^i[q_i(x_i, s, \gamma_i, \varphi)] \le Q(s)\varphi(x_i) + \epsilon \tag{5.25}$$

となるようにとっておけば

$$\begin{aligned} \tilde{E}[q(x, t+s, \tilde{\gamma}, \varphi)] = E[&\int_0^t f(X^x(u), \gamma(u)) e^{-c_u^{x,\gamma}} du] \\ &+ \tilde{E}[e^{-c_t^{x,\gamma}} \{\sum_{i=1}^{n} 1_{U_i}(X^x(t)) q(X^x(t), s, \gamma_i, \varphi) \\ &+ 1_{U^*}(X^x(t)) q(X^x(t), s, \gamma_{n+1}, \varphi)\}] \end{aligned} \tag{5.26}$$

ここで，(5.24) を使えばシュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned} &|\tilde{E}[1_{U^*}(X^x(t)) q(X^x(t), s, \gamma_{n+1}, \varphi)]| \\ &\le M\tilde{E}[\{\int_0^s (1 + |\hat{X}_{n+1}(r)|^{2m}) dr + (1 + |\hat{X}_{n+1}(s)|^{2m})\}^2]^{\frac{1}{2}} P(X^x(t) \in U^*)^{\frac{1}{2}} \\ &\le M_1 \epsilon^{\frac{1}{2}} (1 + |x|^{2m}) \end{aligned}$$

また，

$$|E^i[q(y, s, \gamma_i, \varphi)] - E^i[q(x_i, s, \gamma_i, \varphi)]| < \epsilon, \quad y \in U_i$$

なので，(5.25), (5.23) より，

$$\begin{aligned} 1_{U_i}(X^x(t)) E^i[q(y, s, \gamma_i, \varphi)] \,|_{y = X^x(t)} &\le 1_{U_i}(X^x(t))(Q(s)\varphi(x_i) + 2\epsilon) \\ &\le 1_{U_i}(X^x(t))(Q(s)\varphi(X^x(t)) + 3\epsilon) \end{aligned}$$

したがって，(5.26) より，

$$\tilde{E}[q(x, t+s, \tilde{\gamma}, \varphi)]$$

$$\leq E[\int_0^t f(X^x(u),\gamma(u))e^{-c_u^{x,\gamma}}du + e^{-c_t^{x,\gamma}}Q(s)\varphi(X^x(t))] + M_2\epsilon, \ \ \forall\epsilon$$

よって

$$Q(t+s)\varphi(x) \leq Q(t)Q(s)\varphi(x) + M_2\epsilon$$

より証明は完結した. ■

問 5.1 (5.22) を示せ.

問 5.2

$$\tilde{E}[e^{\sqrt{-1}\xi^*(\tilde{B}(t_2)-\tilde{B}(t_1))}|\tilde{\mathcal{F}}_{t_1}] = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}(t_2-t_1)}, \quad t_1 \leq t_2$$

を示せ.

5.4 ベルマン方程式の粘性解

さて，ベルマン原理から，値関数がベルマン方程式の粘性解となっていることが導かれる．このことを示そう.

$$F(x,p,A,u) = -\inf_{\gamma\in\Gamma}\{\sum_{i,j}\frac{1}{2}a^{ij}(x,\gamma)A_{ij} + \sum_i b^i(x,\gamma)p_i - c(x,\gamma)u + f(x,\gamma)\}$$

とおくとき，この F が退化楕円型であり，単調であることは仮定より明らかである.

【定理 5.4.1】 定理 5.3.2 の条件を仮定する．このとき，(5.9) で定義される値関数は $U=[0,T)\times R^N$ 上で,

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + F(x,Dv,D^2v,v) = 0 \tag{5.27}$$

の粘性解であり，$v(T,x)=\varphi(x)$ を満たす． また，この解は一意である.

証明 $\hat{v}\in\mathbf{C}^{1,2}$ で，$v(t_0,x_0)-\hat{v}(t_0,x_0)=0$，$(t_0,x_0)$ の近傍 で $v(t,x)-\hat{v}(t,x)\leq 0$ なるものとする．$|v(t,x)|\leq M(1+|x|^{2m})$ であるので，$v(t,x)\leq\hat{v}(t,x)$, $\forall(t,x)$ かつ，$|\hat{v}|+|\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}|+|D\hat{v}|+|D^2\hat{v}|\leq M(1+|x|^{2m})$ であるとしてよい．このとき,

$$-\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0,x_0) + F(x_0,D\hat{v}(t_0,x_0),D^2\hat{v}(t_0,x_0),\hat{v}(t_0,x_0)) \leq 0 \tag{5.28}$$

を示す．$v(t,x)$ を x の関数とみたものに作用素 $Q(t-t_0)$ を施してできた関数の x_0 での値を $Q(t-t_0)v(t,\cdot)(x_0)$ と表すと

$$\begin{aligned}\hat{v}(t_0,x_0) &= v(t_0,x_0) = Q(T-t_0)\varphi(x_0)\\ &= Q(t-t_0)Q(T-t)\varphi(x_0)\\ &= Q(t-t_0)v(t,\cdot)(x_0)\\ &= \inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d} E[\int_0^{t-t_0} e^{-c_r^{x_0,\gamma}} f(X_r^{x_0},\gamma_r)dr + e^{-c_{t-t_0}^{x_0,\gamma}} v(t,X_{t-t_0}^{x_0})]\\ &\leq \inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d} E[\int_0^{t-t_0} e^{-c_r^{x_0,\gamma}} f(X_r^{x_0},\gamma_r)dr + e^{-c_{t-t_0}^{x_0,\gamma}} \hat{v}(t,X_{t-t_0}^{x_0})]\end{aligned}$$

したがって，伊藤の公式により，

$$0 \leq \inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d} E[\int_0^{t-t_0} e^{-c_r^{x_0,\gamma}}\{f(X_r^{x_0},\gamma_r) + \frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0+r,X_r^{x_0}) + L^{\gamma_r}\hat{v}(t_0+r,X_r^{x_0})\}dr]$$

$\gamma\in\Gamma$ とし，$\gamma(t)\equiv\gamma$ となる定数制御をとり，$h=t-t_0$ で両辺をわり $h\to 0$ として，

$$0 \leq f(x_0,\gamma) + \frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0,x_0) + L^{\gamma}\hat{v}(t_0,x_0), \quad \forall\gamma$$

より (5.28) を得る．

逆に粘性優解であることを示そう．$\hat{v}\in\mathbf{C}^{1,2}(U)$ で，$v(t_0,x_0)-\hat{v}(t_0,x_0)=0$, $v(t,x)-\hat{v}(t,x)\geq 0$ なるものをとる．上と同様の注意により，(t_0,x_0) は $v-\hat{v}$ の最小点であり，$\hat{v}$ は その導関数まで込めて上の増大条件を満たしているとしてよい．上と同様に定理 5.3.2 により，

$$\begin{aligned}\hat{v}(t_0,x_0) &= \inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d} E[\int_0^{t-t_0} e^{-c_r^{x_0,\gamma}} f(X_r^{x_0},\gamma_r)dr + e^{-c_{t-t_0}^{x_0,\gamma}} v(t,X_{t-t_0}^{x_0})]\\ &\geq \inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d} E[\int_0^{t-t_0} e^{-c_r^{x_0,\gamma}} f(X_r^{x_0},\gamma_r)dr + e^{-c_{t-t_0}^{x_0,\gamma}} \hat{v}(t,X_{t-t_0}^{x_0})]\end{aligned}$$

したがって，伊藤の公式により，

$$0 \geq \inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d} E[\int_0^{t-t_0} e^{-c_r^{x_0,\gamma}}\{f(X_r^{x_0},\gamma_r) + \frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0+r,X_r^{x_0}) + L^{\gamma_r}\hat{v}(t_0+r,X_r^{x_0})\}dr]$$

ここで，次のことに注意する．

$$\lim_{h\to 0}|\frac{1}{h}\inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d}E[\int_0^h e^{-c_r^{x_0,\gamma}}\{f(X_r^{x_0},\gamma_r)+\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0+r,X_r^{x_0})+L^{\gamma_r}\hat{v}(t_0+r,X_r^{x_0})\}dr]$$
$$-\frac{1}{h}\inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d}E[\int_0^h\{f(x_0,\gamma_r)+\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0+r,x_0)+L^{\gamma_r}\hat{v}(t_0+r,x_0)\}dr]|=0$$

なぜなら，

$$\begin{aligned}&|f(X_s^{x_0},\gamma_s)e^{-c_s^{x_0,\gamma}}-f(x_0,\gamma_s)|\\&\quad\le|f(X_s^{x_0},\gamma_s)||\int_0^s c(X_r^{x_0},\gamma_r)dr|+|f(X_s^{x_0},\gamma_s)-f(x_0,\gamma_s)|\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E[\int_0^h|f(X_s^{x_0},\gamma_s)e^{-c_s^{x_0,\gamma}}-f(x_0,\gamma_s)|ds]=0$$

が補題 5.3.1 の証明と同じようにして示され，他の項も同様にして上のことがわかるからである．したがって

$$\begin{aligned}0&\ge\limsup_{h\to 0}\frac{1}{h}\inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d}E[\int_0^h\{f(x_0,\gamma_r)+\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0+r,x_0)+L^{\gamma_r}\hat{v}(t_0+r,x_0)\}dr]\\&\ge\limsup_{h\to 0}\frac{1}{h}E[\int_0^h\inf_{\gamma\in\Gamma}\{f(x_0,\gamma)+\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0+r,x_0)+L^{\gamma}\hat{v}(t_0+r,x_0)\}dr]\\&=\inf_{\gamma\in\Gamma}\{f(x_0,\gamma)+\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0,x_0)+L^{\gamma}\hat{v}(t_0,x_0)\}\end{aligned}$$

すなわち，

$$-\inf_{\gamma\in\Gamma}\{f(x_0,\gamma)+\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(t_0,x_0)+L^{\gamma}\hat{v}(t_0,x_0)\}\ge 0$$

また $v(t,x)=Q(T-t)\varphi(x)$ の (t,x) に関する連続性は補題 5.3.1 の ii) と iii) から得られる．

一意性は付録の定理 7.7.2 で示した． ■

5.5 定 常 問 題

以下では (5.6), (5.7) を次の条件に強めて考える．

$$|\varphi(x)| + |f(x,\gamma)| \leq K \tag{5.29}$$

$$0 < c_0 \leq c(x,\gamma) \leq K \tag{5.30}$$

有界連続関数 g に対して

$$\| g \|_\infty = \sup_{x \in R^N} |g(x)|$$

と定義する．このとき，有界連続関数 ψ, ψ_1, ψ_2 が与えられたとき，次のことは明らかであろう．

$$\| Q(s)\psi \|_\infty < \infty, \quad \forall s \tag{5.31}$$

$$\| Q(s)\psi_1 - Q(s)\psi_2 \|_\infty \leq \| \psi_1 - \psi_2 \|_\infty \tag{5.32}$$

問 5.3　(5.31), (5.32) を示せ．

さて，$T = \infty$ とし，

$$\xi(x) = \inf_{\mathcal{A}d} E[\int_0^\infty e^{-c_s^{x,\gamma}} f(X_s, \gamma_s) ds] \tag{5.33}$$

とおく．また

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| + |f(x,\gamma) - f(y,\gamma)| \leq \rho(|x-y|) \tag{5.34}$$

を仮定し，かつ，

$$f(x,\gamma) \text{ は } (x,\gamma) \text{ について連続} \tag{5.35}$$

とする．次の定理は明らかであろう．

【定理 5.5.1】　(5.1), (5.2), (5.29), (5.30), (5.34), (5.35) の仮定の下で 任意の有界連続関数 ψ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \| Q(t)\psi - \xi \|_\infty = 0$$

でかつ，$Q(t)\xi = \xi$ であり，ξ は次の方程式の粘性解である．

$$-\inf_{\gamma\in\Gamma} \{L^\gamma \xi + f(x,\gamma)\} = 0 \tag{5.36}$$

5.6 最適停止問題に対する処罰方程式

前節の仮定の下で，$\Gamma = \Gamma_\epsilon = [0, \frac{1}{\epsilon}]$ とし，特に

$$f(x,\gamma) = f(x) + \gamma g(x), \quad c(x,\gamma) = \alpha + \gamma,\ \alpha > 0$$

なる場合を考える．ここで

$$f(x), g(x) \text{ は有界連続} \tag{5.37}$$

を仮定する．また $\sigma(x,\gamma) = \sigma(x)$, $b(x,\gamma) = b(x)$ とする．したがって制御確率過程は

$$X_t^x = x + \int_0^t \sigma(X_s^x)dB_s + \int_0^t b(X_s^x)ds \tag{5.38}$$

で，値関数は

$$w_\epsilon(x) = \inf_{\mathcal{A}d_\epsilon} E[\int_0^\infty e^{-\alpha t - \int_0^t \gamma_s ds}\{f(X_t^x) + \gamma_t g(X_t^x)\}dt] \tag{5.39}$$

である．ここで，

$$\mathcal{A}d_\epsilon = \{\gamma_s; \gamma_s \text{ は } \Gamma_\epsilon \text{ 値 } \mathcal{F}_t \text{ 発展的可測過程 }\}$$

である．w_ϵ のベルマン方程式 (5.36) は

$$-\inf_{0 \le \gamma \le \frac{1}{\epsilon}}\{Lw_\epsilon - (\alpha + \gamma)w_\epsilon + f(x) + \gamma g(x)\} = 0 \tag{5.40}$$

となる．ここで

$$Lw = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x)D_{ij}w + \sum_{i=1}^N b^i(x)D_i w$$

である．

$$F_\epsilon = \{x; g(x) \le w_\epsilon(x)\}$$

とおくとき，

$$-\inf_{0 \le \gamma \le \frac{1}{\epsilon}}\{\gamma g(x) - \gamma w_\epsilon\} = \frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - g)_+ = \frac{1}{\epsilon}1_{F_\epsilon}(w_\epsilon - g)$$

ここで,

$$(w_\epsilon - g)_+ = (w_\epsilon - g) \vee 0$$

したがって (5.40) は

$$\alpha w_\epsilon - Lw_\epsilon - f(x) + \frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - g)_+ = 0 \tag{5.41}$$

あるいは

$$\alpha w_\epsilon - Lw_\epsilon - f(x) + \frac{1}{\epsilon}1_{F_\epsilon}(w_\epsilon - g) = 0 \tag{5.42}$$

と書ける．すなわち, w_ϵ は (5.41) あるいは (5.42) の粘性解というわけである．ここで,

$$\tilde{w}_\epsilon(x) = E[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{f(X_t^x) - \frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - g)_+(X_t^x)\}dt] \tag{5.43}$$

とおこう．このとき, 4.4 節でみたように, $\tilde{w}_\epsilon$ は

$$\alpha\tilde{w}_\epsilon - L\tilde{w}_\epsilon - f(x) + \frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - g)_+ = 0 \tag{5.44}$$

の粘性解であり, また w_ϵ もそうであるから, 粘性解の一意性により $w_\epsilon = \tilde{w}_\epsilon$. したがって

$$w_\epsilon(x) = E[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{f(X_t^x) - \frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - g)_+(X_t^x)\}dt] \tag{5.45}$$

また

$$w_\epsilon(x) = E[\int_0^\infty e^{-\alpha t - \frac{1}{\epsilon}\int_0^t 1_{F_\epsilon}(X_s^x)ds}\{f(X_t^x) + \frac{1}{\epsilon}1_{F_\epsilon}g(X_t^x)\}dt] \tag{5.46}$$

も示される．このことは, 確率制御問題 (5.39) の最適制御が

$$\gamma_s = \frac{1}{\epsilon}1_{F_\epsilon}(X_s^x)$$

であることを示している．

さて, $\| w_\epsilon \|_\infty \leq C$ となることに注意しよう．実際 (5.39) から

$$\| w_\epsilon \|_\infty \leq \| G_\alpha |f| \|_\infty + \| g \|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

だからである．ここで, $G_\alpha f(x) = E[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t^x)dt]$. さらに (5.39) から $\epsilon \to 0$ のとき, w_ϵ は単調に減少することがわかるから $\exists \lim_{\epsilon\to 0} w_\epsilon(x) = w(x)$, $\forall x$.

【命題 5.6.1】 $w(x) \le g(x), \forall x$ ならば

$$w(x) = \inf_{\tau} E_x[\int_0^{\tau} e^{-\alpha t} f(X_t)dt + e^{-\alpha\tau} g(X_\tau)]$$

ここで $\inf_\tau$ はすべての停止時刻を動かしたときの下限を意味する．また，$P_x = P \circ (X_\cdot^x)^{-1}$.

証明　$F = \{x; w(x) \ge g(x)\} = \{x; w(x) = g(x)\}$ とおく．F, F_ϵ は閉集合であり $F = \bigcap_{\epsilon>0} F_\epsilon$ である．

$$\tau_{F_\epsilon} = \begin{cases} \inf\{t; X_t \in F_\epsilon\}, & \{\} \ne \emptyset \text{ のとき} \\ \infty, & \{\} = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

$\tau_\epsilon = \tau_{F_\epsilon}$ とおく．w_ϵ, g は連続であるから (5.46) より，

$$\begin{aligned} w_\epsilon(x) &= E_x[\int_0^{\tau_\epsilon} e^{-\alpha s} f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau_\epsilon} w_\epsilon(X_{\tau_\epsilon})] \\ &= E_x[\int_0^{\tau_\epsilon} e^{-\alpha s} f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau_\epsilon} g(X_{\tau_\epsilon})] \end{aligned}$$

であり，$\epsilon \to 0$ のとき，$\tau_F < \infty$ 上で $\tau_\epsilon \to \tau_F$ であるから

$$w(x) = E_x[\int_0^{\tau_F} e^{-\alpha s} f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau_F} g(X_{\tau_F})]$$

さらに，(5.46) より，$\forall\tau$ 停止時刻に対して

$$w_\epsilon(x) \le E_x[\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau} w_\epsilon(X_\tau)]$$

であるから

$$\begin{aligned} w(x) &\le E_x[\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau} w(X_\tau)] \\ &\le E_x[\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau} g(X_\tau)] \end{aligned}$$

であるから，証明された．■

$w(x) \le g(x)$ となることを示すには通常解析的な手法がとられる．6.8 節で改めてその手法を考察する．

！注意　命題 5.6.1 のタイプの確率制御問題を最適停止問題，(5.39) をその処罰問題，(5.41) あるいは (5.42) を処罰方程式という．

5.7　小さな不規則摂動

5.1 節の設定に戻ろう．次の確率微分方程式を考える．

$$X_t^x = x + \sqrt{\epsilon}\int_0^t \sigma(X_s^x, \gamma_s)dB_s + \int_0^t b(X_s^x, \gamma_s)ds$$

ここで σ, b は (5.1), (5.2) の条件を満たし，また (5.6)-(5.8) の条件を満たす $f(x,\gamma)$, φ, $c(x,\gamma)$ が与えられているとする．値関数を

$$v_\epsilon(t,x) = \inf_{\Gamma\in\mathcal{A}d} E[\int_0^{T-t} e^{-c_s^{x,\gamma}} f(X_s^x, \gamma_s)ds + e^{-c_{T-t}^{x,\gamma}}\varphi(X_{T-t}^x)]$$

とする確率制御問題を考察する．この $v_\epsilon(t,x)$ は定理 5.4.1 により

$$-\frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} - \inf_{\gamma\in\Gamma}\{L^{\gamma,\epsilon}v_\epsilon + f(x,\gamma)\} = 0$$

の $v_\epsilon(T,x) = \varphi(x)$ を満たす粘性解である．ここで

$$L^{\gamma,\epsilon}v = \frac{\epsilon}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(x,\gamma)D_{ij}v + \sum_i b^i(x,\gamma)D_i v - c(x,\gamma)v$$

この v_ϵ の $\epsilon \to 0$ とした極限を考えるが，次の粘性解の安定性に関する補題は基本的である．

【補題 5.7.1】　D を R^N の領域，F_ϵ は退化楕円型（定義 4.4.1）であるとし，w_ϵ は

$$-\frac{\partial w_\epsilon}{\partial t} + F_\epsilon(t,x,Dw_\epsilon,D^2w_\epsilon,w_\epsilon) = 0,\quad [0,T)\times D$$

の粘性解とする．また $[0,T)\times D$ 上広義一様に $F_\epsilon \to F, \epsilon \to 0$ であり，$[0,T]\times\bar{D}$ 上広義一様に $w_\epsilon \to w$ とする．このとき w は

$$-\frac{\partial w}{\partial t} + F(t,x,Dw,D^2w,w) = 0,\quad [0,T)\times D$$

の粘性解である．

証明　$\hat{w} \in \mathbf{C}^\infty([0,T) \times D)$ で (t_0, x_0) を

$$w(t_0,x_0) = \hat{w}(t_0,x_0),\ w(t,x) < \hat{w}(t,x),\ (t,x) \in U_{t_0,x_0},\ \neq (t_0,x_0)$$

なる点とする．ただし，U_{t_0,x_0} は (t_0,x_0) の近傍．このとき，$[0,T] \times \bar{D}$ 上広義一様に $w_\epsilon \to w$, $\epsilon \to 0$ であるので，ある点列 (t_ϵ, x_ϵ) で

$$w_\epsilon(t,x) - \hat{w}(t,x) \le w_\epsilon(t_\epsilon,x_\epsilon) - \hat{w}(t_\epsilon,x_\epsilon),\ \ (t,x) \in U_{t_\epsilon,x_\epsilon}$$

かつ $(t_\epsilon,x_\epsilon) \to (t_0,x_0)$ となるものが選べるから

$$\tilde{w}(t,x) = \hat{w}(t,x) + w_\epsilon(t_\epsilon,x_\epsilon) - \hat{w}(t_\epsilon,x_\epsilon)$$

とおけば

$$\tilde{w}(t,x) \ge w_\epsilon(t,x),\ \ (t,x) \in U_{t_\epsilon,x_\epsilon},\ \ \tilde{w}(t_\epsilon,x_\epsilon) = w_\epsilon(t_\epsilon,x_\epsilon)$$

となる． w_ϵ が粘性劣解であることから

$$-\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(t_\epsilon,x_\epsilon) + F_\epsilon(t_\epsilon,x_\epsilon,D\tilde{w}(t_\epsilon,x_\epsilon),D^2\tilde{w}(t_\epsilon,x_\epsilon),\tilde{w}(t_\epsilon,x_\epsilon)) \le 0$$

であるが，F_ϵ が F に広義一様に収束すること，$(t_\epsilon,x_\epsilon) \to (t_0,x_0)$, かつ $w_\epsilon(t_\epsilon,x_\epsilon) \to w(t_0,x_0)$ なることを使えば

$$-\frac{\partial \hat{w}}{\partial t}(t_0,x_0) + F(t_0,x_0,D\hat{w}(t_0,x_0),D^2\hat{w}(t_0,x_0),\hat{w}(t_0,x_0)) \le 0$$

となり，w が粘性劣解であることがわかる．粘性優解であることも同様である．■

【定理 5.7.2】　$[0,T] \times R^N$ 上広義一様に $v_\epsilon(t,x) \to v(t,x)$, $\epsilon \to 0$ であり，$v(t,x)$ は

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial t} - \inf_{\gamma \in \Gamma}\{\sum_i b^i(x,\gamma)D_i v - c(x,\gamma)v + f(x,\gamma)\} = 0 \\ v(T,x) = \varphi(x) \end{cases} \tag{5.47}$$

の一意的な粘性解である．

証明　補題 5.3.1 と同様にして，v_ϵ はコンパクト集合上で一様有界，同程度連続であることがわかる．したがってアスコリ・アルツェラの定理により，一様収束する部分列がとれるが，補題 5.7.1 を使えば，その極限 $v(t,x)$ は (5.47) の粘性解であることがわかるが，また粘性解の一意性（付録 定理 7.7.2 ）により，実は広義一様に $v_\epsilon \to v$, $\epsilon \to 0$, となっていることがわかる．■

5.8　デリバティブの価格づけ

$B_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^d)$ を 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された d 次元標準ブラウン運動とし，$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{N}$, $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^B &= \sigma(B_s; 0 \le s \le t), \\ \mathcal{N} &= \{B \subset \Omega; \exists A, \text{ s.t. } P(A) = 0, B \subset A \in \mathcal{F}_T^B\} \end{aligned}$$

とする．満期日を T とするデリバティブの価格づけを考えるがそのために以下の準備をする．

$$r(t) : [0,T] \times \Omega \mapsto R^1$$

$$b(t) = (b_1(t), b_2(t), \cdots, b_N(t))^* : [0,T] \times \Omega \mapsto R^N$$

$$\sigma(t) = (\sigma_j^i(t))_{1 \le i \le N,\ 1 \le j \le d} : [0,T] \times \Omega \mapsto R^N \otimes R^d$$

は発展的可測で，

$$\int_0^T (|r(t)| + |b(t)| + \| \sigma \|^2) dt < \infty \text{ a.s.}$$

を満たすとする．国債の価格を表す確率過程を S_t^0 とし，それは

$$dS_t^0 = S_t^0 r(t) dt, \quad S_0^0 = 1 \tag{5.48}$$

に従うものとする．N 種類の株があるとし，各株価の変動は確率微分方程式

$$dS_t^i = S_t^i (b_i(t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_j^i(t) dB_t^j), \ \ i = 1, 2, \cdots, N \tag{5.49}$$

に従うものとする．保有資産額を表す確率過程を $V(t)$ とし，i 番目の株への投資額を $\pi^i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, N$ とする．

$$\pi^0(t) = V(t) - \sum_{i=1}^{N} \pi^i(t) \tag{5.50}$$

とする．$V(t)$ の満たす方程式が

$$dV(t) = \sum_{i=0}^{N} \pi^i(t) \frac{dS_t^i}{S_t^i} \tag{5.51}$$

で，かつ

$$\int_0^T |r(t)V(t)|dt + \int_0^T |\pi(t)^*(b(t) - r(t)\mathbf{1})|dt + \int_0^T |\pi(t)^*\sigma(t)|^2 dt < \infty, \quad P- \text{ a.s.} \tag{5.52}$$

となっているとき，戦略 (V,π), $\pi = (\pi^1, \pi^2, \cdots, \pi^N)^*$ は自己資金充足であるという．ただし，$\mathbf{1} = (1,1,\cdots,1)^*$．ここで，(5.51) は (5.48)-(5.50) を用いれば，

$$dV(t) = r(t)V(t)dt + \pi(t)^*(b(t) - r(t)\mathbf{1})dt + \pi(t)^*\sigma(t)dB_t \tag{5.53}$$

と表されることに注意しよう．

【定義 5.8.1】 自己資金充足戦略 (V,π) が許容であるというのは，ある定数 $K > 0$ に対して $V \geq -K$ a.s. となるときをいう．

【定義 5.8.2】 許容である戦略 (V,π) が裁定戦略であるというのは

$$V(0) = 0, \ V(T) \geq 0 \quad \text{a.s. かつ } P(V(T) > 0) > 0 \tag{5.54}$$

となるときをいう．またこのような戦略がないとき，市場モデル $S = (S^0, S^1, \cdots, S^N)$ は無裁定であるという．

まず，市場モデルが無裁定であるための十分条件をあげておこう．

【定理 5.8.3】 ある発展的可測過程 $\phi = (\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^d)^*$ で

$$b_i(t) - r(t) = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j^i(t)\phi^j(t) \tag{5.55}$$

$$\int_0^T |\phi(t)|^2 dt < \infty \quad \text{a.s.} \tag{5.56}$$

$$E[e^{-\int_0^T \phi(t)^* dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T |\phi(t)|^2 dt}] = 1 \tag{5.57}$$

を満たすものがあれば市場モデルは無裁定である.

証明　まず，このような ϕ が存在するとき，(5.53) は

$$dV(t) = r(t)V(t)dt + \pi(t)^*\sigma(t)\phi(t)dt + \pi(t)^*\sigma(t)dB_t \tag{5.58}$$

と書けることに注意しておこう.

$$Z_t = e^{-\int_0^t \phi(s)^* dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\phi(s)|^2 ds}$$

とおくと，(5.57) より Z_t はマルチンゲールとなる.

$$\hat{P}(A) = E[Z(T)1_A], \quad A \in \mathcal{F}_T \tag{5.59}$$

とおき，

$$\hat{B}_t = B_t + \int_0^t \phi(s)ds \tag{5.60}$$

とおくと，$\hat{P}$ は $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の確率測度を定義し，$\hat{B}_t$ は $\hat{P}$ の下でブラウン運動となる．このとき，(5.49) は

$$dS_t^i = S_t^i(r(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j^i(t)d\hat{B}_t^j) \tag{5.61}$$

となり，また (5.58) は

$$dV(t) = r(t)V(t)dt + \pi(t)^*\sigma(t)d\hat{B}_t \tag{5.62}$$

と表されるが

$$\beta(t) = \frac{1}{S_t^0} = e^{-\int_0^t r(s)ds}$$

とおけば

$$d(\beta(t)V(t)) = \beta(t)\pi(t)^*\sigma(t)d\hat{B}_t$$

となり，$\bar{V}(t) \equiv \beta(t)V(t)$ は $\hat{P}$ の下で局所マルチンゲールとなる．(V,π) が許容で $\beta > 0$ であるから $\bar{V}$ は下に有界，したがって$\bar{V}(t)$ は $\hat{P}$ の下で優マルチンゲールとなる．よって，定理 1.6.2 により，停止時刻 $\forall\tau \leq T$ に対して

$$\hat{E}[\bar{V}(\tau)] \leq \hat{E}[\bar{V}(0)] = V(0) \tag{5.63}$$

したがって，(V,π) が裁定戦略であるとすると (5.63) より，$\tau = T$ とすれば

$$\hat{E}[\bar{V}(T)] = \hat{E}[\beta(T)V(T)] \leq 0$$

$V(T) \geq 0$ a.s. $\beta(T) > 0$ であるから $V(T) = 0,\ \hat{P} -$ a.s. より，$V(T) = 0, P -$ a.s. が従い，これは $P(V(T) > 0) > 0$ に矛盾する．すなわち，裁定戦略はない． ■

!注意 i) $V \geq -K$ という条件を除くと $V(0) = 0$ であっても，$P(V(T) > 0) > 0$, $V(T) \geq 0$ a.s. となる戦略は存在することが知られている．

ii) 上で定義した $\hat{P}$ を同値確率測度という．

【定義 5.8.4】 $\mathcal{F}_T$ 可測確率変数 $\xi \geq 0$ を条件付き請求権という．

【定義 5.8.5】 条件付き請求権 ξ が実現可能であるというのは，ある許容な戦略 (V,π) があって $V(T) = \xi$ a.s. となるときをいう．

【定義 5.8.6】 (5.55)-(5.57) が満たされている市場モデル S が完備であるというのは同値確率測度 $\hat{P}$ について可積分である条件付き請求権 ξ が常に実現可能であるときをいう．

【定理 5.8.7】 $r(t)$ は下に有界であるとする．(5.55)-(5.57) を仮定し，$N = d$ であり，行列 $\sigma(t,\omega)$ が $[0,T] \times \Omega$ 上 $m \times P$ a.s. で正則であるとする．ただし，m はルベーグ測度．このとき，市場モデル S は完備である．

証明　ξ を可積分条件付き請求権とする．仮定より $\beta(T)$ は有界なので，

$$\hat{E}[\beta(T)\xi] = E[\beta(T)Z(T)\xi] < \infty$$

したがって，$M_t = E[\beta(T)Z(T)\xi|\mathcal{F}_t]$ はマルチンゲール．ゆえに，マルチンゲールの表現定理 2.7.2 とその注意により，ある発展的可測過程 $\psi(s) = (\psi^1(s), \psi^2(s), \cdots, \psi^N(s))^*$ で

$$\int_0^T |\psi(s)|^2 ds < \infty, \ \ P- \text{ a.s.}$$

なるものがあって

$$M_t = E[\beta(T)Z(T)\xi|\mathcal{F}_t] = v_0 + \int_0^t \psi^*(s)dB_s$$

$v_0 = E[\beta(T)Z(T)\xi]$ と表される． ベイズの公式（[44] 参照）により，

$$\hat{M}_t = \hat{E}[\beta(T)\xi|\mathcal{F}_t] = Z(t)^{-1}E[\beta(T)Z(T)\xi|\mathcal{F}_t] = Z(t)^{-1}M_t$$

したがって

$$dZ_t = -Z_t\phi(t)^*dB_t$$

に注意して

$$\begin{aligned} d\hat{M}_t &= Z_t^{-1}dM_t - M_tZ_t^{-2}dZ_t - Z_t^{-2}d\langle M, Z\rangle_t + M_tZ_t^{-3}d\langle Z\rangle_t \\ &= Z_t^{-1}\psi_t^*dB_t + Z_t^{-1}M_t\phi_t^*dB_t + Z_t^{-1}\psi_t^*\phi_t dt + Z_t^{-1}M_t\phi_t^*\phi_t dt \\ &= Z_t^{-1}(\psi_t^* + M_t\phi_t^*)d\hat{B}_t \end{aligned}$$

となる． $\varphi_s = Z_s^{-1}(\psi_s + M_s\phi_s)$ とおくと，

$$d\hat{M}_t = \varphi_t^* d\hat{B}_t$$

$\hat{\pi}_s^* = S_s^0\varphi_s^*\sigma^{-1}(s)$ とおくと，

$$d\hat{M}_t = \beta(t)\hat{\pi}_t^*\sigma(t)d\hat{B}_t$$

となるので，$\bar{V}_t = \beta(t)V_t = \hat{M}_t$ とおくと，

$$d\bar{V}_t = \beta(t)\hat{\pi}_t^*\sigma(t)d\hat{B}_t$$

すなわち，

$$dV(t) = r(t)V(t)dt + \hat{\pi}_t^* \sigma(t) d\hat{B}_t$$

定義より，$\hat{M}_t \geq 0$ であるから，$V_t \geq 0$ となり，$(V, \hat{\pi})$ は許容であるが，

$$V(T) = \beta(T)^{-1} \hat{M}_T = \hat{E}[\xi | \mathcal{F}_T] = \xi$$

であるから ξ は実現可能. ■

! 注意
$$H_t = \beta(t) Z_t \equiv e^{-\int_0^t r(s)ds - \int_0^t \phi(s)^* dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\phi(s)|^2 ds}$$

とおく. すなわち，H は

$$dH_t = -H_t(r(t)dt + \phi(t)^* dB_t), \quad H_0 = 1$$

の解. また，戦略 $(V, \hat{\pi})$ は

$$dV(t) = r(t)V(t)dt + \hat{\pi}(t)^* \sigma(t)\phi(t)dt + \hat{\pi}(t)^* \sigma(t) dB_t, \quad V(T) = \xi \tag{5.64}$$

を満たすが，上でみたように，

$$V(t) = H_t^{-1} E[H_T \xi | \mathcal{F}_t] \tag{5.65}$$

$$\hat{\pi}(t) = H_t^{-1} \sigma^{-1}(t)^* (\psi(t) + M_t \phi(t)) \tag{5.66}$$

である. これは (5.64) が，終端時刻 T で条件 $V(T) = \xi$ をつけた後ろ向き確率微分方程式と考えられ，その解 $(V, \hat{\pi})$ は (5.65), (5.66) で与えられているとみることができる. また H_t はデフレータとよばれる.

さて，さらに，消費があることも考慮した戦略を考察する. 消費を表す確率過程 $C(t)$ は $\mathcal{F}_t$ に適合し，右連続増加過程であるとし，(V, π, C) が消費付き戦略であるとは

$$dV(t) = r(t)V(t)dt - dC(t) + \pi_t(t)^* (B(t) - r(t)\mathbf{1})dt + \pi(t)^* \sigma(t) dB_t \tag{5.67}$$

および，(5.52) を満たすものをいう. さらに，$V \geq -K$, $K > 0$ 定数 となっているとき，消費付き戦略は許容であるという.

ξ を条件付き請求権とするとき，権利売却価格 p_s を

$$p_s = \inf\{v \geq 0; \exists (V, \pi, C): \text{消費付き許容戦略, s.t. } V(0) = v,\ V(T) \geq \xi\}$$

権利購買価格 p_b を

$$p_b = \sup\{v \geq 0; \exists (V, \pi, C): \text{消費付き許容戦略, s.t. } V(0) = -v,\ V(T) \geq -\xi\}$$

と定義する．このとき，

【定理 5.8.8】　定理 5.8.7 の条件の下で

$$p_s = p_b = \hat{E}[\beta(T)\xi]$$

証明　まず，$p_s = \hat{E}[\beta(T)\xi]$ を示す．(V, π, C) を許容な消費付き戦略で $V(0) = v,\ V(T) \geq \xi$ を満たすものとする．$\bar{V}(t) = \beta(t)V(t)$ は

$$\bar{V}(t) = v + \int_0^t \beta(s)\pi(s)^*\sigma(s)d\hat{B}_s - \int_{(0,t)} \beta(s)dC_s$$

を満たすが $\bar{V}(t) + \int_{(0,t)} \beta(s)dC_s = v + \int_0^t \beta(s)\pi(s)^*\sigma(s)d\hat{B}_s$ は下に有界なので $\hat{P}$ について優マルチンゲール．したがって

$$\hat{E}[\bar{V}(T) + \int_{(0,T)} \beta(s)dC_s] \leq \hat{E}[\bar{V}(0)] = v$$

であるが，$\hat{E}[\bar{V}(T)] \geq \hat{E}[\beta(T)\xi]$ であるから

$$p_s \geq \hat{E}[\beta(T)\xi]$$

である．一方 $(V, \hat{\pi}, 0)$ を定理 5.8.7 のようにとれば，$\bar{V}(t)$ はマルチンゲールとなり，このとき，$\hat{E}[\bar{V}(T)] = \hat{E}[\beta(T)\xi]$ であるので

$$p_s = \hat{E}[\beta(T)\xi]$$

次に，$p_b = \hat{E}[\beta(T)\xi]$ を示す．上と同様に許容な消費付き戦略 (V, π, C) で $V(0) = -v,\ V(T) \geq -\xi$ なるものをとり，$\bar{V}(t) = \beta(t)V(t)$ ととれば $\bar{V}(t) + \int_{(0,t)} \beta(s)dC_s$

は $\hat{P}$ について優マルチンゲールとなり，

$$\hat{E}[\bar{V}(T) + \int_{(0,T)} \beta(s)dC_s] \leq \hat{E}[\bar{V}(0)] = -v$$

であるが，$-\hat{E}[\beta(T)\xi] \leq \hat{E}[\bar{V}(T)]$ なので

$$p_b \leq \hat{E}[\beta(T)\xi]$$

がわかるが，ξ が有界のときは，定理 5.8.7 の $(V, \hat{\pi}, 0)$ に対して $\check{\pi} = -\hat{\pi}$ ととり，対応する $\bar{V}$ を $\bar{V}^{\check{\pi}}$ とおけば

$$d\bar{V}_t^{\check{\pi}} = -\beta(t)\check{\pi}(t)^* d\hat{B}_t, \quad \bar{V}^{\check{\pi}}(0) = -v \equiv \hat{E}[\beta(T)\xi]$$

より，$\bar{V}^{\check{\pi}}(t) = -\bar{V}^{\hat{\pi}}(t)$ となり

$$p_b = \hat{E}[\beta(T)\xi]$$

がわかる．ξ が有界でない場合は，$\xi_k = \xi \wedge k$ に対して議論し，$k \to \infty$ とすればよい． ■

■ **例 5.2** ■ $r(t) \equiv r > 0$: 定数, $\sigma_j^i(t) \equiv \sigma_j^i$: 定数行列とし，$\xi = g(S(T))$ であるとする．$\hat{P}$ の下で S_t は

$$dS_t^i = S_t^i(rdt + \sum_{j=1}^N \sigma_j^i d\hat{B}_t^j)$$

すなわち，

$$S_t^i = e^{rt + \sum_{j=1}^N \sigma_j^i \hat{B}_t^j - \frac{1}{2}a^{ii}t} S_0^i$$

であるが，これはマルコフ過程であるので

$$\begin{aligned} V(t) &= \beta(t)^{-1}\hat{E}[\beta(T)\xi|\mathcal{F}_t] \\ &= \hat{E}[e^{-r(T-t)}g(S(T))|\mathcal{F}_t] \\ &= \hat{E}_{S_t}[e^{-r(T-t)}g(S(T-t))] \end{aligned}$$

である．ここで $a^{ij} = (\sigma\sigma^*)^{ij}$.

$$u(t,x) = \hat{E}_x[e^{-r(T-t)}g(S_{T-t})] \tag{5.68}$$

とおくと，定理 4.4.3 とその注意により g が高々多項式の増大度をもつ，連続関数ならば u は

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j} a^{ij} x_i x_j D_{ij} u - \sum_i r x_i D_i u + ru = 0 \\ u(T,x) = g(x) \end{cases}$$

の一意的な粘性解である．また，さらに g の 2 階までの導関数が高々多項式の増大度をもち，滑らかならば $u \in \mathbf{C}^{1,2}([0,T) \times R^N)$ であるので（[14] Theorem 5.5）古典解となる．したがって，このとき，

$$V(t) = u(t, S_t)$$

は

$$\begin{aligned} dV(t) &= \sum_{i,j} S_t^i D_i u \sigma_j^i d\hat{B}_t^j + (\frac{\partial u}{\partial t} + Lu)(t, S_t)dt \\ &= \sum_{i,j} S_t^i D_i u \sigma_j^i d\hat{B}_t^j + rV(t)dt \end{aligned}$$

を満たす．そして

$$\hat{\pi}^i(t) = S_t^i D_i u(t, S_t)$$

である．

特に，$N = 1$, $\sigma = \sigma_1^1$ とするとき，(5.68) は

$$\begin{aligned} u(t,x) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} g(xe^{r(T-t)+\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} g(xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

であるから，$g(x) = (x-k)_+$ のときは

$$\alpha_1 = \frac{\log \frac{x}{k} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log \frac{x}{k} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

とおくとき,

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{-\alpha_1}^{\infty} (xe^{\sigma\sqrt{T-t}z-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - ke^{-r(T-t)})p(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\alpha_1} xe^{-\sigma\sqrt{T-t}z-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}p(z)dz - ke^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\alpha_1} p(z)dz \\
&= x\int_{-\infty}^{\alpha_2} p(z)dz - ke^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\alpha_1} p(z)dz, \quad t < T
\end{aligned}
$$

ただし $p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$. これは Black-Scholes の公式とよばれる（[20]）.

6

拡散過程II

拡散過程と解析学との関係をより詳しく考察する．両者の橋渡しをするのが伊藤の公式であったから，必然的にこの公式を再考察することになる．この公式に適用する関数を超関数として拡張することになるが，特に，マルコフ過程の加法的汎関数の分解公式とみる福島分解の一次元の場合と，Krylov による方法を紹介する．前者からは，局所時間を含む一次元拡散過程の加法的汎関数のクラスが得られる．また後者は偏微分方程式と拡散過程との関連を考察する際，有力な方法を提供する．楕円型偏微分方程式のディリクレ問題や最適停止問題の変分不等式を取り扱う際への応用例を挙げた．まずは，拡散過程の特性量である生成作用素を作用素論的な立場から見直すことから始める．

6.1　強連続縮小半群の生成作用素

さて，命題 4.2.1 で，σ, b が有界でリプシッツ条件を満たすとき，(4.11) で定義された半群 P_t はバナッハ空間 $\mathbf{C}_\infty$ 上の強連続な縮小半群，すなわち，Feller 半群となることを示した．作用素論的な立場でみるとき，コルモゴロフ方程式 (4.26) は，この強連続縮小半群の生成作用素に関する方程式，発展方程式である．ここで，バナッハ空間上の強連続半群に関する一般論を紹介することにより，(4.26) を発展方程式としてとらえる立場を示しておこう．

【定義 6.1.1】　$\mathbf{X}$ が（実）バナッハ空間であるとは，

i) R^1 上のベクトル空間であり,

ii) 完備なノルム空間である

ときをいう.

4.2 節で取り上げた $\mathbf{C}_\infty$ は $\|\cdot\|_\infty$ をノルムとするバナッハ空間である.

【定義 6.1.2】 バナッハ空間 $\mathbf{X}$ が与えられたとき，その上の有界作用素 U_t が強連続縮小半群であるとは，命題 4.2.1 の i)-iv) の性質を U_t が満たすときをいう．ただし，ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を $\mathbf{X}$ のノルムとし，$\mathbf{C}_\infty$ を $\mathbf{X}$ におきかえる.

【定義 6.1.3】 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ をバナッハ空間 とするとき，線形作用素 $L : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}$ が閉作用素であるとは L の定義域 $\mathcal{D}(L)$ にノルム $\| x \| = \| x \|_{\mathbf{X}} + \| Lx \|_{\mathbf{Y}}$ を入れたとき，$\mathcal{D}(L)$ がこのノルムに関して完備なときをいう．ここで，$\| x \|_{\mathbf{X}}$, $\| Lx \|_{\mathbf{Y}}$ はそれぞれ，$\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ でのノルム.

【定義 6.1.4】 バナッハ空間 $\mathbf{X}$ 上の強連続な縮小半群 U_t, $t \geq 0$ の生成作用素 $\bar{L}$ は

$$\bar{L}f = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(U_t f - f) \tag{6.1}$$

と定義され，その定義域 $\mathcal{D}(\bar{L})$ は右辺の極限が存在するような f 全体としたものである．またここでの極限は $\mathbf{X}$ における強収束の意味でとる.

このとき，次の一般的な定理がある.

【定理 6.1.5】 U_t をバナッハ空間 $\mathbf{X}$ 上の強連続な縮小半群，$\bar{L}$ をその生成作用素とする．このとき，$f \in \mathcal{D}(\bar{L})$ に対し，$U_t f$ は以下を満たす.

i) $U_t f \in \mathcal{D}(\bar{L})$

ii) $U_t f$ は $t > 0$ について強微分可能で

$$\frac{d}{dt} U_t f = \bar{L} U_t f = U_t \bar{L} f \tag{6.2}$$

iii)　$U_t f - f = \int_0^t U_s \bar{L} f ds = \int_0^t \bar{L} U_s f ds$

証明　U_t の半群性と縮小性を使って，$h \downarrow 0$ のとき，

$$\frac{1}{h}(U_{t+h}f - U_t f) = U_t(\frac{1}{h}(U_h f - f)) \to U_t(\bar{L}f)$$

だから，$U_t f \in \mathcal{D}(\bar{L})$ であり，また

$$\frac{1}{h}(U_h(U_t f) - U_t f) \to \bar{L}(U_t f)$$

したがって，$\frac{d}{dt}^+ U_t f = \bar{L} U_t f = U_t \bar{L} f$. ここで，$\frac{d}{dt}^+$ は右微分．また，

$$\begin{aligned}\| \frac{1}{-h}(U_{t-h}f - U_t f) - U_t \bar{L} f \| &\le \| U_{t-h}(\frac{1}{h}(U_h - f)) - U_{t-h}\bar{L}f \| \\ &\quad + \| U_{t-h}\bar{L}f - U_{t-h}U_h\bar{L}f \| \\ &\le \| \frac{1}{h}(U_h f - f) - \bar{L}f \| + \| \bar{L}f - U_h\bar{L}f \|\end{aligned}$$

より，$h \downarrow 0$ として ii) がいえ，$U_0 f = f$ であるから iii) が従う．■

(4.24) で定義された $u(s,x)$ は $u(s,x) = P_{T-s}f(x)$ であるから，作用素論的立場でみるとき，(4.26) は (6.2) に他ならない．さらに，次の定理を示す．

【定理 6.1.6】　U_t をバナッハ空間 $\mathbf{X}$ 上の強連続な縮小半群，$\bar{L}$ をその生成作用素とし，$\alpha > 0$ とする．このとき，

i)　$\mathcal{D}(\bar{L})$ は稠密．

ii)　$\alpha I - \bar{L} \ : \mathcal{D}(\bar{L}) \mapsto \mathbf{X} \quad 1:1$

iii)　$\| (\alpha I - \bar{L})^{-1} \| \le \alpha^{-1}$

iv)　$(\alpha I - \bar{L})^{-1} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} U_t f dt$

v)　$\bar{L}$ は閉作用素．

証明　i) $f \in \mathbf{X}$ に対し，$f_s = \int_0^s U_t f dt$ とおくとき，

$$\begin{aligned} U_h f_s &= \int_0^s U_h U_t f dt \\ &= \int_h^{s+h} U_t f dt \\ &= f_s + \int_s^{s+h} U_t f dt - \int_0^h U_t f dt \end{aligned}$$

$h \downarrow 0$ として，

$$\frac{1}{h}(U_h f_s - f_s) = \frac{1}{h}\int_s^{s+h} U_t f dt - \frac{1}{h}\int_0^h U_t f dt \to U_s f - f$$

したがって，$f_s \in \mathcal{D}(\bar{L})$ であり，また $\lim_{s\downarrow 0} \|\frac{1}{s} f_s - f\| = 0$ より，$\mathcal{D}(\bar{L})$ が稠密であることがわかる．

ii)　まず $(\alpha I - \bar{L})$ の値域が $\mathbf{X}$ 全体であることを示す．

$$G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} U_t f dt$$

と定義する．$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \parallel U_t f \parallel dt \leq \frac{1}{\alpha} \parallel f \parallel$ より，G_α は定義され，有界で $\parallel G_\alpha \parallel \leq \frac{1}{\alpha}$ かつ $G_\alpha f \in \mathcal{D}(\bar{L})$ である．実際

$$\begin{aligned} U_h G_\alpha f &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} U_h U_t f dt \\ &= e^{\alpha h} \int_h^\infty e^{-\alpha t} U_t f dt \\ &= e^{\alpha h}(G_\alpha f - \int_0^h e^{-\alpha t} U_t f dt) \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{1}{h}(U_h G_\alpha f - G_\alpha f) = \frac{1}{h}(e^{\alpha h} - 1) G_\alpha f - \frac{1}{h} e^{\alpha h} \int_0^h e^{-\alpha t} U_t f dt \to \alpha G_\alpha f - f$$

したがって，$G_\alpha f \in \mathcal{D}(\bar{L})$ で $\bar{L} G_\alpha f = \alpha G_\alpha f - f$ すなわち，$(\alpha I - \bar{L}) G_\alpha f = f$．このことは，$\alpha I - \bar{L}$ の値域が $\mathbf{X}$ 全体であることを示す．次に

$$\alpha I - \bar{L} : \mathcal{D}(\bar{L}) \mapsto \mathbf{X} \quad 1:1$$

をいうために，$(\alpha I - \bar{L})u = 0$ とするとき，

$$u_h = \frac{1}{h}(U_h u - u) - \bar{L}u$$

とおくと，

$$U_h u = hu_h + u + h\bar{L}u = (1 + h\alpha)u + hu_h$$

から

$$\| u \| \geq \| U_h u \| \geq (1 + h\alpha) \| u \| - h \| u_h \|$$

より，$\frac{1}{\alpha} \| u_h \| \geq \| u \|$．よって $||u_h|| \to 0, h \downarrow 0$ より，$||u|| = 0$ すなわち $u = 0$ を得る．したがって ii) がいえた．

iii), iv)

$$(\alpha I - \bar{L})G_\alpha = I = (\alpha I - \bar{L})(\alpha I - \bar{L})^{-1}$$

から $G_\alpha = (\alpha I - \bar{L})^{-1}$. $||G_\alpha|| \leq \frac{1}{\alpha}$ は ii) で示した．

v) $v_n = \bar{L}u_n$ とおくと $-v_n = (\alpha - \bar{L})u_n - \alpha u_n$ だから

$$-(\alpha - \bar{L})^{-1} v_n = u_n - \alpha(\alpha - \bar{L})^{-1} u_n$$

$(\alpha - \bar{L})^{-1}$ は有界だから $u_n \to u, v_n \to v, n \to \infty$ とすると $-(\alpha - \bar{L})^{-1} v = u - \alpha(\alpha - \bar{L})^{-1} u$. したがって $u \in \mathcal{D}(\bar{L})$ で $-v = (\alpha - \bar{L})u - \alpha u$ すなわち $\bar{L}u = v$ となり $\bar{L}$ が閉作用素であることがわかる．■

上に現れた作用素

$$G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} U_t f dt = (\alpha I - \bar{L})^{-1} f$$

をレゾルベント作用素という．

$$(\alpha I - \bar{L})G_\alpha f = f, \quad f \in \mathbf{X}$$
$$G_\alpha(\alpha I - \bar{L})u = u, \quad u \in \mathcal{D}(\bar{L})$$

より $u = G_\beta f$ として，

$$\begin{aligned} \alpha G_\alpha G_\beta f &= G_\beta f + G_\alpha \bar{L} G_\beta f \\ &= \beta G_\alpha G_\beta f + G_\beta f - G_\alpha f \end{aligned}$$

から

$$(\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta + G_\alpha - G_\beta = 0$$

を得る．これをレゾルベント方程式とよぶ．

***!* 注意**　i) 逆に，定理 6.1.6 の i),ii),iii) を満たす $\mathbf{X}$ 上の線形作用素 $\bar{L}$ が与えられたとき，$U_t = \lim_{\alpha\to\infty} e^{t\alpha(\alpha G_\alpha - I)}$, で 強連続半群 U_t が定まり，その生成作用素は $\bar{L}$ となることが知られている．ただし，$e^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{n!}$.

ii) 定理 6.1.6 により，(4.11) で定義された半群 P_t の生成作用素 $\bar{L}$ が定義され，その性質が示されたが，さらに P_t が $\mathbf{C}_\infty$ 上の非負の作用素であることから，$\bar{L}$ が次の最大値原理を満たすことがわかる．すなわち，$f \in \mathcal{D}(\bar{L})$ で $f(x^*) = \sup_{x\in R^N} f(x)$ のとき，$\bar{L}f(x^*) \le 0$. 実際

$$\bar{L}f(x^*) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f(x^*) - f(x^*))$$

であるが，$f(x) \le f(x^*)$ より，$P_t f(x^*) - f(x^*) \le 0$ であるからである．

【命題 6.1.7】　$\bar{L}$ を (4.11) で定義された Feller 半群 P_t の生成作用素とする．$f \in \mathcal{D}(\bar{L})$ とすると，

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \bar{L}f(X_s)ds$$

は 各 x に対して $(\mathcal{B}_t(W^N), P_x)$ マルチンゲールである．

証明　マルコフ性を使って，

$$\begin{aligned} E_x[M_t^f|\mathcal{B}_s] &= M_s^f + E_x[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t \bar{L}f(X_r)dr|\mathcal{B}_s] \\ &= M_s^f + E_{X_s}[f(X_{t-s}) - f(X_0) - \int_0^{t-s} \bar{L}f(X_r)dr] \ \text{a.s.} \end{aligned}$$

であるが，定理 6.1.5 iii) より，$P_{t-s}f - f = \int_0^{t-s} P_r \bar{L} f dr$ であるから

$$E_x[M_t^f|\mathcal{B}_s] = M_s^f \ \text{a.s.}$$

■

【命題 6.1.8】 $f \in \mathbf{C}_\infty$ が，ある $g \in \mathbf{C}_\infty$ に対して $f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t g(X_s)ds$ が $(\mathcal{B}_t(W^N), P_x)$ マルチンゲール, $\forall x$ となるならば，$f \in \mathcal{D}(\bar{L})$ でかつ，$\bar{L}f = g$ である．

証明　仮定より，$P_t f(x) - f(x) - \int_0^t P_s g ds = 0$. したがって，

$$\begin{aligned} \| \tfrac{1}{t}(P_t f - f) - g \|_\infty &= \| \frac{1}{t} \int_0^t (P_s g - g) ds \|_\infty \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \| P_s g - g \|_\infty \, ds \to 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$f \in \mathcal{D}(\bar{L})$ で，$\bar{L}f = g$. ■

! 注意　さて，4.1 節で見たように，$\forall f \in \mathbf{C}_K^2(R^N)$ に対して，$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ は $(\mathcal{B}_t(W^N), P_x)$ -マルチンゲールであったから，上の命題 6.1.8 により， $\mathbf{C}_K^2(R^N) \subset \mathcal{D}(\bar{L})$ かつ

$$Lf(x) = \bar{L}f(x), \quad \forall f \in \mathbf{C}_K^2(R^N)$$

6.2　ディリクレ形式

ここで，(4.9) から決まる半群 P_t があるラドン測度 $m(dx)$ について対称のとき，定理 4.3.1 により定まる，$\mathbf{L}^2$ 強連続半群 T_t の生成作用素 $\bar{L}$ について考察しておこう．T_t が m 対称であるから，$G_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f dt$ もそうである．さらに，$\bar{L}u = \alpha u - G_\alpha^{-1} u$ に注意すれば，G_α^{-1} が自己共役であることから $\bar{L}$ も自己共役となる．さらに，

$$\begin{aligned} (f, G_\alpha f)_m &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} (f, T_t f)_m dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} (T_{\frac{t}{2}} f, T_{\frac{t}{2}} f)_m dt \geq 0 \end{aligned}$$

から

$$(-\bar{L}u, u)_m = \lim_{\alpha \to 0} (\alpha u - \bar{L}u, u)_m = \lim_{\alpha \to 0} (G_\alpha^{-1} u, u)_m \geq 0$$

すなわち，$-\bar{L}$ はヒルベルト空間 $\mathbf{L}^2(dm)$ 上の非負定値自己共役作用素である．$-\bar{L}$ のスペクトル分解 ([1] 参照）を $\{E_\lambda; -\infty < \lambda < \infty\}$ とすると，実は

$$-\bar{L} = \int_{[0,\infty)} \lambda dE_\lambda$$

であり，さらに

$$T_t = \int_{[0,\infty)} e^{-t\lambda} dE_\lambda \tag{6.3}$$

である．対称な強連続半群 T_t に付随するディリクレ形式

$$\mathcal{E}(f,f) = (\sqrt{-\bar{L}}f, \sqrt{-\bar{L}}f)_m$$

は

$$\mathcal{E}(f,f) = \int_{[0,\infty)} \lambda d(E_\lambda f, f)_m$$

となるが，(6.3) を用いれば

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f,f) &= \lim\nolimits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{[0,\infty)} (1 - e^{-t\lambda}) d(E_\lambda f, f)_m \\ &= \lim\nolimits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(f - T_t f, f)_m \\ &\equiv \lim\nolimits_{t\downarrow 0} \mathcal{E}^{(t)}(f,f)\end{aligned} \tag{6.4}$$

であり，ここで $\mathcal{E}^{(t)}(f,f)$ は $t \downarrow 0$ のとき単調増大であることに注意すれば，

$$\mathcal{D}[\mathcal{E}] = \{f; \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(f - T_t f, f)_m < \infty\} \tag{6.5}$$

と表される．このディリクレ空間 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}[\mathcal{E}])$ を P_t の（確率微分方程式 (4.1) の解 X_t^x で決まる対称拡散過程の）ディリクレ空間，$\mathcal{E}$ をそのディリクレ形式という．

! 注意　ディリクレ形式は $\mathbf{L}^2$ 半群と独立に次のように定義される．

その台が R^N 全体となる正のラドン測度 m が与えられたとき，$\mathcal{E}$ が $\mathbf{L}^2(R^N; m)$ 上のディリクレ形式であるとは，次の i)-iii) を満たすときをいう．

i) $\mathcal{E} : \mathcal{D}[\mathcal{E}] \times \mathcal{D}[\mathcal{E}] \mapsto R^1$ は対称双一次形式．

ii) $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ は $\| u \| = \sqrt{\mathcal{E}(u,u) + (u,u)_m}$ をノルムとする，$\mathbf{L}^2(R^N; m)$ 内稠密なヒルベルト空間．

iii)　$u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$, $v = (0 \vee u) \wedge 1$ のとき，$v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ で，$\mathcal{E}(v,v) \leq \mathcal{E}(u,u)$

また，ディリクレ形式 $\mathcal{E}$ とその定義域 $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ を組にして，ディリクレ空間という．$\mathbf{L}^2(R^N;m)$ 上のディリクレ空間 $(\mathcal{E},\mathcal{D}[\mathcal{E}])$ が与えられたとき，m 対称なマルコフ的強連続 $\mathbf{L}^2$ 半群 T_t が対応し，その生成作用素から上のやり方で決まる T_t に付随するディリクレ形式はもとのものと一致する（[15]）．ここでは，R^N 上でのみディリクレ空間の定義を与えたが，状態空間 R^N はずっと一般のものにとることができる．

■ 例6.1 ■ Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動の定める半群 Q_t（cf. 4.3 節）を考える．ただし，$a=1$ とする．$f \in \mathbf{C}_b^2$ に対して

$$Q_tf(x) - f(x) = \int_0^t Q_s(\frac{1}{2}f'' - \frac{x}{2}f')ds$$

だから，

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f - Q_tf, f)_m = -(\frac{1}{2}f'' - \frac{x}{2}f', f)_m = \frac{1}{2}(f', f')_m$$

ただし，$m(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ であり，Q_t の定めるディリクレ形式は

$$\mathcal{E}(f,f) = \frac{1}{2}(f',f')_m$$

$$\mathcal{D}[\mathcal{E}] = \{f; f' \text{ が絶対連続で } \int_R (|f|^2 + |f'|^2)m(dx) < \infty\}$$

一方 Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動は Q_t を $\mathbf{C}_\infty$ に制限するとき Feller 半群を定めることも注意しておこう．(4.16) より，

$$\begin{aligned} Q_tf(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-t})}}\int f(y)e^{-\frac{(y-e^{-\frac{t}{2}}x)^2}{2(1-e^{-t})}}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(\sqrt{1-e^{-t}}z + e^{-\frac{t}{2}}x)e^{-\frac{z^2}{2}}dz \end{aligned}$$

であるから，$f \in \mathbf{C}_\infty$ なら $\lim_{|x|\to\infty} Q_tf(x) = 0$ であり，$Q_tf(x)$ は連続であることがわかるから $Q_tf \in \mathbf{C}_\infty$. また

$$\| Q_tf - f \|_\infty \to 0,\ \ t \to 0,\ \ f \in \mathbf{C}_\infty$$

も明らかである．

■ **例 6.2** ■ $a^{ij}(x)$ はリプシッツ連続で有界，$b^i(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N D_j a^{ji}$ とする．さらに，$a^{ij}=a^{ji}$ で

$$\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2,\ \ c_0>0$$

を仮定する．　また，$\sigma(x)=(a(x))^{\frac{1}{2}}$ とおくとき，$\sigma(x)$ もリプシッツ連続となる（[42]）．フィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\tilde{P};\mathcal{F}_t)$ で定義されたブラウン運動 $\tilde{B}_t$ を用意し，確率微分方程式

$$dX_t=\sigma(X_t)d\tilde{B}_t,\ \ X_0=x$$

を考えると，この方程式は 定理 3.2.1 により一意解をもつ．

$$Z_t=e^{\int_0^t b^*\sigma^{-1}(X_s)d\tilde{B}_s-\frac{1}{2}\int_0^t b^*a^{-1}b(X_s)ds}$$

により，

$$\frac{dP}{d\tilde{P}}|_{\mathcal{F}_t}=Z_t$$

で P を定義するとき，定理 3.6.1 とその注意で見たように

$$B_t=\tilde{B}_t-\int_0^t \sigma^{-1}b(X_s)ds$$

は P に関してブラウン運動となり，したがって X_t は

$$dX_t=\sigma(X_t)dB_t+b(X_t)dt,\ \ X_0=x$$

の解になる．この X_t の推移半群を P_t とし，その $\mathbf{L}^2(dx)$ に拡張された半群を T_t とする．

$$Lu=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N D_i(a^{ij}D_ju),\ \ u\in\mathbf{C}_K^2$$

は $\mathbf{L}^2(dx)$ 上の対称作用素を定義するが，対称双一次形式 $\mathcal{E}(f,g)=-(f,Lg)$ は可閉であり，その最小閉拡大はディリクレ形式

$$\mathcal{E}(f,g)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N\int_{R^N} a^{ij}(x)D_ifD_jgdx,$$

$$\mathcal{D}[\mathcal{E}] = \{f \in \mathbf{L}^2(dx); D_i f \in \mathbf{L}^2(dx),\ i = 1, \cdots, N\} \equiv \mathbf{W}^{1,2}(R^N)$$

となり,

$$\mathcal{E}(f,g) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f - T_t f, g),\ \ f, g \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$$

ただし, D_i は超関数の意味での微分. 特に, $a^{ij}(x) = \delta^{ij}$ のとき, すなわち, ブラウン運動のディリクレ形式は

$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{R^N} D_i f D_i g dx \equiv \mathbf{D}(f,g)$$

で, この $\mathbf{D}$ をディリクレ積分という ([15] 参照).

! 注意　例 6.2 で与えられた対称作用素 L がディリクレ形式を与えるための a の条件は, 上で仮定したものより, 実は, もっと緩やかである. またその場合にもディリクレ形式に付随して拡散過程が対応する ([15]).

6.3　時間反転，対称性

前節では, 推移半群 P_t の対称性を仮定した. 確率論的にみるとき, この仮定の意味することは, 何であろうか. ここでその点について考察する. $W_T^N = \mathbf{C}([0,T]; R^N)$ とし,

$$\mathcal{B}_t = \sigma(w(s); 0 \le s \le t),\ t \le T,$$

$$\check{\mathcal{B}}_t = \sigma(w(s); T - t \le s \le T)$$

とおく. $(W_T^N, \mathcal{B}_T, \mathcal{B}_t, P_x, X_t)$ を (4.1) の解から決まる拡散過程でその推移半群 P_t は あるラドン測度 $m(dx)$ について対称であるとする. $\mu \in \mathcal{P}(R^N)$ に対して $P_\mu = \int P_x \mu(dx)$ とし, $\mathcal{N}^\mu$ を W_T^N の P_μ 零集合全体とし, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\mu \in \mathcal{P}(R^N)} \sigma(\mathcal{B}_t \cup \mathcal{N}^\mu)$, $\check{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{\mu \in \mathcal{P}(R^N)} \sigma(\check{\mathcal{B}}_t \cup \mathcal{N}^\mu)$ とする. $r_T : W_T^N \mapsto W_T^N$ を

$$X_t(r_T w) = X_{T-t}(w),\ \ 0 \le t \le T$$

と定義する. このとき, 次の補題を用意しよう.

【補題 6.3.1】　$$P_m(r_T w \in A) = P_m(A),\ \ A \in \mathcal{F}_T$$

証明　まず，次のことを示そう．

$$E_m[f_0(X_0)f_1(X_{t_1})\cdots f_n(X_{t_n})]$$
$$= E_m[f_n(X_0)f_{n-1}(X_{t_n-t_{n-1}})\cdots f_1(X_{t_n-t_1})f_0(X_{t_n})]$$

$\forall f_0, f_1, \cdots, f_n \in \mathbf{B}(R^N), f_i \geq 0, i = 0, 1, \cdots, n$. 実際，マルコフ性と推移半群 P_t の対称性 を使って

$$\begin{aligned}
&E_m[f_0(X_0)\cdots f_n(X_{t_n})]\\
&= E_m[f_0(X_0)\cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})P_{t_n-t_{n-1}}f_n(X_{t_{n-1}})]\\
&= \int m(dx)f_0(x)P_{t_1}(f_1P_{t_2-t_1}(f_2P_{t_3-t_2}(\cdots(f_{n-1}P_{t_n-t_{n-1}}f_n)\cdots)))(x)\\
&= \int m(dx)f_n(x)P_{t_n-t_{n-1}}(f_{n-1}P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(\cdots(f_1P_{t_1}f_0))\cdots)(x)\\
&= E_m[f_n(X_0)f_{n-1}(X_{t_n-t_{n-1}})\cdots f_1(X_{t_n-t_1})f_0(X_{t_n})]
\end{aligned}$$

である．これを使って，$t_n = T$ として

$$\begin{aligned}
&P_m(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \cdots, X_{t_{n-1}} \in A_{n-1})\\
&= P_m(X_0 \in R^N, X_{t_1} \in A_1, \cdots, X_{t_{n-1}} \in A_{n-1}, X_T \in R^N)\\
&= P_m(X_0 \in R^N, X_{T-t_{n-1}} \in A_{n-1}, \cdots, X_{T-t_1} \in A_1, X_T \in R^N)\\
&= P_m(X_{t_1}(r_Tw) \in A_1, X_{t_2}(r_Tw) \in A_2, \cdots, X_{t_{n-1}}(r_Tw) \in A_{n-1})
\end{aligned}$$

であるから，ディンキン系定理より補題が示される．■

次の公式は Lyons-Zheng の公式 ([27]) を (4.1) の解に対していったものである．これはまた，その原形である，Meyer-Zheng ([31]) の公式に戻って示したものといえる．

【定理 6.3.2】　$f \in \mathbf{C}_b^2$ に対して

$$f(X_t) - f(X_0) = \frac{1}{2}M_t^f(w) + \frac{1}{2}(M_{T-t}^f(r_Tw) - M_T^f(r_Tw)),\ \ P_m \text{ a.s.}$$

証明　伊藤の公式と補題 6.3.1 により

$$f(X_t(r_Tw)) - f(X_0(r_Tw)) = M_t^f(r_Tw) + \int_0^t Lf(X_s(r_Tw))ds,\ P_m \text{ a.s.}$$

したがって

$$f(X_{T-t}) - f(X_T) = M_t^f(r_T w) + \int_{T-t}^{T} Lf(X_s)ds$$

よって，

$$M_{T-t}^f(r_T w) - M_T^f(r_T w) = f(X_t) - f(X_T) - \int_t^T Lf(X_s)ds$$
$$-(f(X_0) - f(X_T) - \int_0^T Lf(X_s)ds)$$

すなわち

$$f(X_t) - f(X_0) = M_{T-t}^f(r_T w) - M_T^f(r_T w) - \int_0^t Lf(X_s)ds$$

一方

$$f(X_t) - f(X_0) = M_t^f + \int_0^t Lf(X_s)ds$$

したがって

$$f(X_t) - f(X_0) = \frac{1}{2}M_t^f + \frac{1}{2}(M_{T-t}^f(r_T w) - M_T^f(r_T w))$$

■

6.4　局所時間，Skorohod 方程式

B_t を 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ で定義された，x から出発するブラウン運動とする．まず，ブラウン運動 B_t の局所時間の定義を与えておこう．

【定義 6.4.1】 $L(t, a, \omega) : [0, \infty) \times R^1 \times \Omega \mapsto R_+$ がブラウン運動の局所時間であるとは，

i)　$L(t, a, \omega)$ は (t, x) について連続．

ii)　$$\int_0^t 1_A(B_s)ds = 2\int_A L(t, x, \omega)dx,\ \ t \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{B}(R^1)$$

もし，局所時間が存在するとすれば，上の ii) で $A=(a-\epsilon,a+\epsilon)$ として

$$L(t,a,\omega)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon}L(t,x,\omega)dx$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4\epsilon}\int_0^t 1_{(a-\epsilon,a+\epsilon)}(B_s)ds$$

である．このことから一意性もわかる．そこで，存在を示しておこう．まず，次のことを示す．

【定理 6.4.2】　ある $A_t^a\in\mathcal{A}_{+,c}$ があって，

$$(B_t-a)_+-(B_0-a)_+=\int_0^t 1_{(a,\infty)}(B_s)dB_s+A_t^a,\ \ P_x \text{ a.s.} \tag{6.6}$$

ただし，$x_+=x\vee 0$.

証明　Friedrichs の軟化子を用意する．すなわち，

$$\rho(x)=\begin{cases} c\exp(\dfrac{1}{|x-1|^2-1}), & 0<x<2\\ 0, & (-\infty,0]\cup[2,\infty)\end{cases}$$

とおき，c は $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx=1$ となるように定める．$\rho_n(x)=n\rho(nx)$ とおき，

$$\psi_n(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\rho_n(\xi-a)d\xi dy,\ x\in R$$

とおけば，$\psi_n'(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho_n(\xi-a)d\xi$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n'(x)=1_{(a,\infty)}(x),\ \lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=(x-a)_+$$

である．したがって，伊藤の公式を使って

$$\psi_n(B_t)-\psi_n(x)=\int_0^t\psi_n'(B_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t\rho_n(B_s-a)ds,\ \ P_x-\text{ a.s.}$$

を得る．ところで

$$E_x[\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t \psi_n'(B_s)dB_s - \int_0^t 1_{(a,\infty)}(B_s)dB_s|^2]$$
$$\le cE_x[\int_0^T |\psi_n'(B_s) - 1_{(a,\infty)}(B_s)|^2 ds] \to 0,\ n\to\infty$$

であるから，必要なら部分列をとって，

$$\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t (\psi_n'(B_s) - 1_{(a,\infty)}(B_s))dB_s| \to 0,\ P_x - \text{ a.s.}$$

かつ $\mathbf{L}^2$ の意味でも 0 に収束する．部分列を T について整合的にとれることは明らかだから，P_x a.s. で，広義一様に

$$\int_0^t \psi_n'(B_s)dB_s \to \int_0^t 1_{(a,\infty)}(B_s)dB_s$$

また，広義一様に$\psi_n(B_t) - \psi_n(x) \to (B_t - a)_+ - (x-a)_+$ なることは明らかだから，P_x a.s. で広義一様に

$$\frac{1}{2}\int_0^t \rho_n(B_s - a)ds \to \exists A_t^a$$

であり，$\rho_n \ge 0$ であるから $A_t^a \in \mathcal{A}_{+,c}$ もわかる．そして

$$(B_t - a)_+ - (x-a)_+ = \int_0^t 1_{(a,\infty)}(B_s)dB_s + A_t^a \tag{6.7}$$

■

【定理 6.4.3】 A_t^a は局所時間である．

証明　$\psi(a) = \psi(a,\omega) : R^1 \times \Omega \mapsto \mathbf{C}([0,T];R^1)$ を

$$\psi(a) = \int_0^t 1_{(a,\infty)}(B_s)dB_s, \quad t\in[0,T]$$

と定義する．このとき，$a<b$ とすると，定理 2.8.1 を使って

$$\begin{aligned}E_0[d(\psi(a),\psi(b))^4] &\equiv E_0[\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t 1_{(a,\infty)}(B_s)dB_s-\int_0^t 1_{(b,\infty)}(B_s)dB_s|^4]\\ &\le \frac{1}{c_1}E_0[|\int_0^T 1_{(a,b]}(B_s)ds|^2]\\ &= \frac{2}{c_1}E_0[\int_0^T(\int_s^T 1_{(a,b]}(B_r)dr)1_{(a,b]}(B_s)ds]\\ &= \frac{2}{c_1}\int_0^T\int_s^T E_0[1_{(a,b]}(B_r)1_{(a,b]}(B_s)]drds\\ &= \frac{2}{c_1}\int_0^T\int_s^T E_0[1_{(a,b]}(B_s)E_{B_s}[1_{(a,b]}(B_{r-s})]drds\\ &= \frac{2}{c_1}\int_0^T\int_s^T(\int_a^b\int_a^b\frac{1}{2\pi\sqrt{s(r-s)}}e^{-\frac{y^2}{2s}-\frac{|z-y|^2}{2(r-s)}}dzdy)drds\\ &\le cT(b-a)^2\end{aligned}$$

したがって，Kolmogorov-Chentsov の定理 (付録参照) により，ある連続な修正 $\tilde{\psi}(a)$ があって，$\psi(a)=\tilde{\psi}(a)$, a.s. となる．よって

$$\Phi(a,\cdot)=(B_\cdot-a)_+-(B_0-a)_+-\int_0^\cdot 1_{(a,\infty)}(B_s)dB_s$$

は $\mathbf{C}([0,T];R^1)$ 上の確率過程として連続な修正をもつ．その修正を $L(\cdot,a,\omega)$ とおけば，$(t,a)\mapsto L(t,a,\omega)$ は連続である．

次に，定義 6.4.1 の ii) を示すために，$\forall f\in\mathbf{C}_K$ に対して

$$\int_0^t f(B_s)ds=2\int_{R^1}L(t,a,\omega)f(a)da \quad \text{a.s.} \tag{6.8}$$

なることを示す．

$$G(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(a)|x-a|_+da$$

とおくと

$$G'(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(a)1_{(a,\infty)}(x)da=\int_{-\infty}^{x}f(a)da$$

であり，かつ $G''(x)=f(x)$ であるから $G\in \mathbf{C}^2(R^1)$. したがって伊藤の公式により

$$G(B_t)-G(B_0)-\int_0^t G'(B_s)dB_s=\frac{1}{2}\int_0^t f(B_s)ds$$

この左辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a)((B_t-a)_+-(B_0-a)_+)da-\int_0^t(\int_{-\infty}^{\infty} f(a)1_{(a,\infty)}(B_s)da)dB_s$$

に等しいので (6.8) を得る．ここで，

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\int_0^t f(a)1_{(a,\infty)}(B_s)dB_s)da=\int_0^t(\int_{-\infty}^{\infty} f(a)1_{(a,\infty)}(B_s)da)dB_s$$

なることを使った． ■

$\Omega=W^N$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}_\infty(W^N), \mathcal{F}_t=\mathcal{B}_{t+}(W^N)$, とし，$(\Omega,\mathcal{F},P_x,W_t;\mathcal{F}_t)$ を x から出発するブラウン運動とする．$W_t^+:=|W_t|$ と定義するとき，W_t^+ が連続確率過程であることは明らかである．またその有限次元分布は

$$\begin{aligned}&P_x(W_{t_1}^+\in A_1,\cdots,W_{t_n}^+\in A_n)\\&=\int_{A_1}\int_{A_2}\cdots\int_{A_n} p^+(t_1,x,x_1)\cdots p^+(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)dx_n dx_{n-1}\cdots dx_1\end{aligned}$$

$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, $A_i\in\mathcal{B}([0,\infty))$, $i=1,2,\cdots,n$. ここで

$$p^+(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}+e^{-\frac{|x+y|^2}{2t}})$$

となることも容易にわかる．この確率過程は反射壁ブラウン運動とよばれるものであるが，この確率過程を確率微分方程式の解として書き表したものが，Skorohod 方程式とよばれるものである．

$$\mathbf{W}_0(R^1)=\{w(\cdot)\in\mathbf{C}([0,\infty);R^1);w(0)=0\}$$

$$\mathbf{W}_+(R^1)=\{w(\cdot)\in\mathbf{C}([0,\infty);R^1);w(t)\geq 0\}$$

とおく．

【補題 6.4.4】　$f \in \mathbf{W}_0(R^1), x \ge 0$ に対して $x(\cdot), A(\cdot) \in \mathbf{W}_+(R^1)$ があり，以下を満たす．

i)　$x(t) = x + f(t) + A(t)$

ii)　$A(0) = 0$ で $A(t)$ は単調非減少，

iii)　$\displaystyle\int_0^t 1_{\{0\}}(x(s))dA(s) = A(t)$

またこれらを満たす $x(t)$, $A(t)$ は一意である．

証明

$$A(t) = -\min_{0 \le s \le t}\{(x + f(s)) \wedge 0\}$$

とおき，

$$x(t) = x + f(t) + A(t)$$

とおくとき，この $x(t)$, $A(t)$ が i)-iii) を満たすことをみるのは容易であるから，このような $x(t)$, $A(t)$ が一意であることをいえばよい．もう一つ i)-iii) を満たす $\tilde{x}(t)$, $\tilde{A}(t)$ があったとする．このとき，$x(t_1) > \tilde{x}(t_1)$ なる $t_1 > 0$ があったとすると，

$$t_0 = \max\{t < t_1; x(t) - \tilde{x}(t) = 0\}$$

とすれば，

$$x(t) > \tilde{x}(t) \ge 0, \quad \forall t \in (t_0, t_1]$$

したがって，

$$A(t_0) = \int_0^{t_0} 1_{\{0\}}(x(s))dA(s) = \int_0^{t_1} 1_{\{0\}}(x(s))dA(s) = A(t_1)$$

また $\tilde{A}(t_0) \le \tilde{A}(t_1)$ だから

$$\begin{aligned} 0 < x(t_1) - \tilde{x}(t_1) &= A(t_1) - \tilde{A}(t_1) \\ &\le A(t_0) - \tilde{A}(t_0) \\ &= x(t_0) - \tilde{x}(t_0) = 0 \end{aligned}$$

これは矛盾である．したがって，$x(t) = \tilde{x}(t)$, $\forall t$, また $A(t) = \tilde{A}(t)$.　■

【命題 6.4.5】　$x \ge 0$ とし，B_t を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された，原点から出発するブラウン運動とし，$X_t, \phi(t) \in \mathbf{W}_+(R^1)$ が次の i)-iii) を満たすものと

する．

i)　$X_t = x + B_t + \phi(t)$

ii)　$\phi(0) = 0$, ϕ は単調非減少，

iii)　$\displaystyle\int_0^t 1_{\{0\}}(X_s)d\phi(s) = \phi(t)$

を満たすものとする．このとき，X_t の $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ における法則は W_t^+ の P_x の下での法則と一致する．

証明　補題 6.4.4 により $(\phi(t), X_t)$ の法則は一意的に決まる．よって，W_t^+ がある P_x ブラウン運動 $\bar{B}_t$ と増加過程 $\psi(t)$ によって

$$W_t^+ = x + \bar{B}_t + \psi(t)$$

$$\int_0^t 1_{\{0\}}(W_t^+)d\psi(s) = \psi(t)$$

と書き表されることを示せばよい．定理 6.4.2 および 6.4.3 により

$$(W_t)_+ - (W_0)_+ = \int_0^t 1_{(0,\infty)}(W_s)dW_s + L(t,0,w)$$

したがって

$$(W_t)_- - (W_0)_- = -\int_0^t 1_{(-\infty,0]}(W_s)dW_s + L(t,0,w)$$

ただし，$x_- = (-x) \vee 0$. よって，

$$W_t^+ - W_0^+ \equiv |W_t| - |W_0| = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s)dW_s + 2L(t,0,w)$$

ただし，

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(x) = 1, & x > 0 \\ \operatorname{sgn}(x) = -1, & x \leq 0 \end{cases}$$

ところが，

$$\bar{B}_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s)dW_s$$

とおけば，$\langle \bar{B} \rangle_t = t$ かつ $\bar{B}_t$ はマルチンゲールであるから $\bar{B}_t$ はブラウン運動である．$L(t, 0, w) \in \mathcal{A}_{+,c}$ であるから証明された． ■

***!* 注意**　上の命題の i)–iii) を満たす $(X_t, B_t, \psi(t))$ を Skorohod 方程式の解という．

6.5　伊藤の公式再考 I

伊藤の公式 (2.9) について，もう一度考察しておこう．まず，X_t が確率微分方程式 (4.1) の解であるとする．このとき，(2.9) は

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_j^i(X_s) D_i f(X_s) dB_s^j$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^t b^i(X_s) D_i f(X_s) ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_0^t a^{ij}(X_s) D_{ij} f(X_s) ds$$

となる．これを整理して

$$f(X_t) - f(X_0) = M_t^f + A_t^f \tag{6.9}$$

ここで，

$$M_t^f = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_j^i(X_s) D_i f(X_s) dB_s^j$$
$$A_t^f = \int_0^t L f(X_s) ds$$

また L は (4.5) で定義したものである．(6.9) は (4.1) の解から決まる拡散過程の加法的汎関数の分解公式と見ようというものである．

【定義 6.5.1】　$A_t(\omega) : [0, \infty) \times \Omega \mapsto R^1$ が拡散過程 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P_x, X_t, \theta_t)$ の加法的汎関数であるとは

i)　$A_0(\omega) = 0$

ii)　$A_t(\omega)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測，

iii)　$A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s(\theta_t \omega),\ \forall t, s \geq 0,\ P_x -$ a.s., $\forall x$

なるときをいう．また P_x a.s. で A_t が t について連続であるとき連続加法的汎関数という．

例を挙げておこう．

■ 例6.3 ■ i) f を ボレル可測とするとき，$A_t = f(X_t) - f(X_0)$ は加法的汎関数である．さらに f を連続関数とすれば，A_t は連続加法的汎関数となる．

ii) g を 有界ボレル可測とするとき $A_t = \int_0^t g(X_s)ds$ は連続加法的汎関数である．

さて，(6.9) において，次のことに注意しておく．

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_x[|f(X_t) - f(X_0)|^2] &= \frac{1}{2}(L(f^2) - 2fLf)(x) \\ &\equiv \Gamma(f,f) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij} D_i f D_j f(x) \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_x[(M_t^f)^2] \end{aligned} \tag{6.10}$$

ここで，平方場の記号

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}(L(fg) - fLg - gLf)(x)$$

を用いた．X_t が一次元ブラウン運動のとき，(6.9) は

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)ds \tag{6.11}$$

となるが，これを加法的汎関数の分解公式とみてその一般化を考察しよう．このとき，(6.10) の関係を一般化することが基本的となる．

$\mathbf{M} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P_x, B_t, \theta_t)$ を 一次元ブラウン運動とする．

$$\mathcal{A}(B) = \{A_t; A_t \text{は } \mathbf{M} \text{ の連続加法的汎関数}, E_m[A_t^2] < \infty,\ \forall t\}$$

$$\mathcal{M}(B) = \{M \in \mathcal{A}(B); E_x[M_t] = 0,\ E_x[M_t^2] < \infty,\ \forall t \geq 0, x \in R^1\}$$

ただし，$m(dx)$ は一次元ルベーグ測度で $E_m[A_t] = \int E_x[A_t]m(dx)$.

【補題 6.5.2】 $M \in \mathcal{M}(B)$ に対して

$$E_m[M_t^2] = e_M t, \quad \forall t$$

なる定数 $e_M \in R_+$ が存在する．

証明　$M_{t+s} = M_t + M_s(\theta_t\omega)$ より

$$M_{t+s}^2 = M_t^2 + 2M_tM_s(\theta_t\omega) + M_s(\theta_t\omega)^2$$

したがって

$$\begin{aligned}
E_m[M_{t+s}^2] &= E_m[M_t^2] + 2E_m[M_tM_s(\theta_t\omega)] + E_m[M_s(\theta_t\omega)^2] \\
&= E_m[M_t^2] + 2E_m[M_tE_{X_t}[M_s]] + E_m[E_{X_t}[M_s^2]] \\
&= E_m[M_t^2] + E_m[M_s^2]
\end{aligned}$$

より， $E_m[M_t^2]$ は t について加法的であり，かつ連続で，$E_m[M_0^2] = 0$ であるから，$E_m[M_t^2] = e_M t, \exists e_M$ となる．■

【補題 6.5.3】 f は絶対連続で $\int_{R^1} |f'(x)|^2 dx < \infty$ なるものとする．このとき，ある $M^f \in \mathcal{M}(B)$ があり，

$$\begin{aligned}
E_x[(M_t^f)^2] &= E_x[\int_0^t |f'(B_s)|^2 ds] \\
&= \int_0^t (\int \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2s}} |f'(y)|^2 dy) ds, \quad \forall x
\end{aligned} \tag{6.12}$$

を満たす．

証明　$f_n \in \mathbf{C}_K^2$ で $\int |f_n'(x) - f'(x)|^2 dx \to 0, n \to \infty$ なるものをとる．このとき，

$$M_t^{f_n} = \int_0^t f_n'(B_s) dB_s$$

は $M^{f_n}\in\mathcal{M}(B)$ であり，

$$
\begin{aligned}
E_x[\sup_{0\le t\le T}|M_t^{f_n}-M_t^{f_m}|^2] &\le 4E_x[|M_T^{f_n}-M_T^{f_m}|^2]\\
&=4E_x[\int_0^T|f_n'(B_s)-f_m'(B_s)|^2ds]\\
&=4\int_0^T(\int g(s,x,y)|f_n'(y)-f_m'(y)|^2dy)ds\to 0
\end{aligned}
$$

$n,m\to\infty$, $\forall T$ である．ここで，

$$
g(s,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{|x-y|^2}{2s}}
$$

このことから，必要なら部分列をとって

$$
E_x[\sup_{0\le t\le T}|M_t^{f_n}-M_t^f|^2]\to 0,\ \ n\to\infty,\ \forall T
$$

なる $M^f\in\mathcal{M}(B)$ が存在することがわかる．この M^f はまだ，x に依存しているが，さらに上の部分列を出発点 x に応じてうまく取り替えることにより，x に依存しない $M^f\in\mathcal{M}(B)$ が存在することがわかる．([15] 参照) これから (6.12) が得られる． ■

ここで，

$$
\mathcal{N}(B)=\{A\in\mathcal{A}(B);\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{2t}E_m[A_t^2]=0\}
$$

なるクラスを用意する．

【定理 6.5.4】 f は絶対連続で $\int_{R^1}(|f(x)|^2+|f'(x)|^2)dx<\infty$ なるものとする．このとき，ある $M^f\in\mathcal{M}(B)$ と $A^f\in\mathcal{N}(B)$ があり，

$$
f(B_t)-f(B_0)=M_t^f+A_t^f,\qquad P_x\text{ a.s., }\forall x \tag{6.13}
$$

を満たす．またこのような分解は一意的である．

証明　補題 6.5.3 の M_t^f をとり，

$$
A_t^f=f(B_t)-f(B_0)-M_t^f
$$

とおくとき，$A^f \in \mathcal{N}(B)$ を示す．

$$\begin{aligned} A_t^f &= f(B_t) - f(B_0) - (f_n(B_t) - f_n(B_0)) \\ &\quad + f_n(B_t) - f_n(B_0) - M_t^{f_n} \\ &\quad + M_t^{f_n} - M_t^f \\ &= (f - f_n)(B_t) - (f - f_n)(B_0) \\ &\quad + A_t^{f_n} + M_t^{f_n} - M_t^f \end{aligned}$$

であり，(6.4) より

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_m[|(f - f_n)(B_t) - (f - f_n)(B_0)|^2] = \mathbf{D}(f - f_n, f - f_n)$$

ただし，$\mathbf{D}(f,g) = \frac{1}{2}\int_{R^1} f'(x)g'(x)dx$. また

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_m[(A_t^{f_n})^2] = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_m[|\frac{1}{2}\int_0^t \Delta f_n(B_s)ds|^2] = 0$$

さらに，(6.12) とブラウン運動の対称性を使って

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_m[|M_t^{f_n} - M_t^f|^2] = \mathbf{D}(f_n - f, f_n - f)$$

したがって

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_m[(A_t^f)^2] \le 6\mathbf{D}(f - f_n, f - f_n) \to 0, \quad n \to \infty$$

として示される．

一意性を次に示す．$\tilde{M}^f \in \mathcal{M}(B)$, $\tilde{A}^f \in \mathcal{A}(B)$ があって，

$$f(B_t) - f(B_0) = M_t^f + A_t^f = \tilde{M}_t^f + \tilde{A}_t^f$$

とする．このとき，

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_m[(M_t^f - \tilde{M}_t^f)^2] = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_m[(A_t^f - \tilde{A}_t^f)^2] = 0$$

であり，補題 6.5.2 に注意すれば $E_m[(M_t^f - \tilde{M}_t^f)^2] = 0, \forall t$ となり，したがって

$$E_x[(M_t^f - \tilde{M}_t^f)^2] = 0, \quad \forall t, \quad \text{a.e. } x$$

となる． $M_t = M_t^f - \tilde{M}_t^f$ とおくとき，

$$\begin{aligned} E_x[M_{t+s}^2] &= E_x[M_t^2] + 2E_x[M_t M_s(\theta_t\omega)] + E_x[M_s(\theta_t\omega)^2] \\ &= E_x[M_t^2] + E_x[M_t E_{X_t}[M_s]] + E_x[E_{X_t}[M_s^2]] \\ &= E_x[M_t^2], \ \forall x \end{aligned}$$

だから，$t \downarrow 0$ として $E_x[M_s^2] = 0$, $\forall s$, $\forall x$ を得る．すなわち，$M^f = \tilde{M}^f$，したがって $A^f = \tilde{A}^f$. ■

! 注意 i) もう少し一般に，次のような加法的汎関数のクラスを導入する． $M \in \mathcal{M}(B)_{loc}$ であるとは，ある開集合の列 G_n で $G_n \subset G_{n+1}$, $\forall n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = R^1$ を満たすものと，$M^{(n)} \in \mathcal{M}(B)$ があり，$M_t = M_t^{(n)}$, $t < \tau_{G_n}$ となるものとする．ただし，$\tau_{G_n} = \inf\{t > 0; X_t \notin G_n\}$. また，$N \in \mathcal{N}(B)_{loc}$ とは，上で $M^{(n)} \in \mathcal{M}(B)$ を $N^{(n)} \in \mathcal{N}(B)$, $M_t = M_t^{(n)}$, $t < \tau_{G_n}$ を $N_t = N_t^{(n)}$, $t < \tau_{G_n}$ と置き換えたものとする．このとき，$f \in \mathbf{W}_{loc}^{1,2}(R) = \{f; \int_K (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2)dx < \infty, \ \forall K:$ コンパクト集合$\}$ に対して

$$f(B_t) - f(B_0) = M_t^f + N_t^f, \ \ M \in \mathcal{M}(B)_{loc}, \ N \in \mathcal{N}(B)_{loc}$$

なる一意的な分解が可能であることがわかる．これは，定理 6.4.2, 6.4.3 の一般化である．実際， $f(x) = |x|_+$ ととれば，$f \in \mathbf{W}_{loc}^{1,2}(R)$ で $N_t^f = L(t, 0)$ である．また，さらに，$f(x) = x \log|x| - x$ ととれば，やはり，$f \in \mathbf{W}_{loc}^{1,2}(R)$ で，

$$\begin{aligned} N_t^f &= \int_0^t v.p.\frac{1}{B_s}ds \\ &\equiv \lim\nolimits_{\epsilon_n \to 0} \int_0^t (1_{(-\infty,-\epsilon_n)}(B_s) + 1_{(\epsilon_n,\infty)}(B_s))\frac{1}{B_s}ds \end{aligned}$$

([45] 参照).

ii) 一般に対称正則ディィリクレ形式に対応するマルコフ過程に対してこのような加法的汎関数の分解を与えたものは福島分解とよばれる ([15])．また，(6.13) のような分解をもつ確率過程をディィリクレ過程という．上の証明においてはブラウン運動の対称性を使ったことに注意する．

6.6 伊藤の公式再考 II

もう一つ，伊藤の公式について注意を与えておこう．X_t が必ずしもマルコフ型確率微分方程式の解ではなく，次の確率積分で表されているとする．

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s,\omega)dB_s + \int_0^t b(s,\omega)ds \tag{6.14}$$

ここで $\sigma : [0,\infty) \times \Omega \mapsto R^N \otimes R^N$ は発展的可測で

$$c_0|\xi|^2 \leq \xi^* \sigma\sigma^* \xi \leq c_1|\xi|^2 \tag{6.15}$$

を満たすものとし，$b : [0,\infty) \times \Omega \mapsto R^N$ は

$$|b(s,\omega)| \leq K \tag{6.16}$$

を満たすとする．有界領域 D に対して

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0; X_t \notin D\}$$

と定義する．このとき，次の定理は Krylov の不等式として知られている ([23] 参照).

【定理 6.6.1】 X_t を (6.14) で定義されたものとし，(6.15), (6.16) を仮定するとき，

$$E[\int_0^{\tau_D} |f(X_s)|ds] \leq M \parallel f \parallel_{N,D} \tag{6.17}$$

ここで

$$\parallel f \parallel_{N,D} = (\int_D |f(x)|^N dx)^{\frac{1}{N}}$$

M は N, K, c_0 と D の直径だけによって決まる定数である．

この定理の証明は難しい．ここでは，この定理を用いて伊藤の公式が拡張されることを示しておこう．

ソボレフ空間 $\mathbf{W}^{2,p}(D)$ を用意する．

$$\mathbf{W}^{2,p}(D) = \{u; u,\ D_i u,\ D_{ij} u \in \mathbf{L}^p(D),\ i,j = 1,\cdots,N\}$$

ここでの微分は超関数の意味でとる．

$$\| u \|_{\mathbf{W}^{2,p}} = (\| u \|^p_{\mathbf{L}^p(D)} + \| Du \|^p_{\mathbf{L}^p(D)} + \| D^2 u \|^p_{\mathbf{L}^p(D)})^{\frac{1}{p}}$$

とおく．また D は滑らかな境界をもつとする（リプシッツ境界）．このとき，$p > \frac{N}{2}$ のとき，$u \in \mathbf{C}^{0,\alpha}(\bar{D})$, $\alpha = 2 - \frac{N}{p}$ であり，

$$\sup_D |u(x)| \le c \| u \|_{\mathbf{W}^{2,p}} \tag{6.18}$$

([17], Theorem 7.26) この事実と上の定理を合わせて次の定理が得られる．

【定理 6.6.2】 X_t を (6.14) のものとし，(6.15), (6.16) を仮定する．$c(s,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \mapsto R_+$ を有界発展的可測とするとき，$u \in \mathbf{W}^{2,N}(D)$ に対して

$$\begin{aligned} e^{-\varphi(\tau_D \wedge t)} u(X_{\tau_D \wedge t}) - u(X_0) = &\int_0^{\tau_D \wedge t} e^{-\varphi(s)} (Du(X_s))^* \sigma(s,\omega) dB_s \\ &+ \int_0^{\tau_D \wedge t} e^{-\varphi(s)} L_s u(X_s) ds \quad \text{a.s.} \end{aligned} \tag{6.19}$$

ここで

$$\varphi(s) = \int_0^s c(r,\omega) dr$$

$$L_s u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(s,\omega) D_{ij} u + \sum_{i=1}^N b^i(s,\omega) D_i u - c(s,\omega) u, \;\; a = \sigma\sigma^*$$

証明　$u_n \in \mathbf{C}^2(D) \cap \mathbf{C}^{0,\alpha}(\bar{D})$ で

$$\| u - u_n \|_{\mathbf{W}^{2,N}} \to 0, \;\; n \to \infty$$

と近似する．このとき，(6.18) により，$\| u - u_n \|_\infty \to 0, n \to \infty$ であることに注意する．u_n に対しては (6.19) が成立し，また

$$|L_s u_n| \le K_1 (\sum_{i,j=1}^N |D_{ij} u_n| + \sum_{i=1}^N |D_i u_n| + |u_n|)$$

であり，定理 6.6.1 より，

$$E[\sup_{0\le t\le T}|\int_0^{\tau_D\wedge t}(L_su_n-L_su_m)(X_s)ds|]\le K_1\parallel u_n-u_m\parallel_{\mathbf{W}^{2,N}}$$

であり，また

$$\begin{aligned}E[\sup_{0\le t\le T}|\int_0^{\tau_D\wedge t}&e^{-\varphi(s)}(Du_n-Du_m)^*(X_s)\sigma(s,\omega)dB_s|^2]\\ &\le K_2E[|\int_0^{\tau_D\wedge T}e^{-2\varphi(s)}(Du_n-Du_m)^*a(Du_n-Du_m)(X_s)ds|]\\ &\le K_3\parallel Du_n-Du_m\parallel_{\mathbf{L}^{2N}}\le K_4\parallel u_n-u_m\parallel_{\mathbf{W}^{2,N}}\end{aligned}$$

であるから，

$$\int_0^{\tau_D\wedge t}e^{-\varphi(s)}L_su(X_s)ds\in\mathcal{A}_c$$

および

$$\int_0^{\tau_D\wedge t}e^{-\varphi(s)}(Du(X_s))^*\sigma(s,\omega)dB_s\in\mathcal{M}_{2,c}$$

が定義されることがわかり，極限移行により，$u\in\mathbf{W}^{2,N}(D)$ に対して (6.19) が成立することがわかる． ■

6.7　ディリクレ問題と解の確率論的表現

$D\subset R^N$ を有界領域とする．次のディリクレ問題を考察しよう．

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^N D_i(a^{ij}D_ju)-\sum_{i=1}^N\tilde{b}^iD_iu+c(x)u=f\\ u|_{\partial D}=0\end{cases}\tag{6.20}$$

ここで次の条件を仮定する．$a^{ij}=a^{ji}$ で

$$\nu_1|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\nu_2|\xi|^2\tag{6.21}$$

$$|\tilde{b}(x)|\le M\tag{6.22}$$

$$0<c_0\le c(x)\le M\tag{6.23}$$

また，ソボレフ空間 $\mathbf{W}^{1,2}(D)$ とそこでのノルム $\|\cdot\|_{\mathbf{W}^{1,2}}$ を導入する．

$$\mathbf{W}^{1,2}(D)=\{u\in\mathbf{L}^2(D);D_iu\in\mathbf{L}^2(D),\ i=1,2,\cdots,N\}$$
$$\| u \|_{\mathbf{W}^{1,2}}=(\int_D\{|u(x)|^2+|Du(x)|^2\}dx)^{\frac{1}{2}}$$

また $\mathbf{W}_0^{1,2}(D)$ を $\mathbf{C}_K^\infty(D)$ のノルム $\|\cdot\|_{\mathbf{W}^{1,2}}$ による完備化とする．(6.20) を弱い形で表して

$$\begin{cases} a(u,v)=(f,v), & \forall v\in\mathbf{W}_0^{1,2} \\ u\in\mathbf{W}_0^{1,2}(D) \end{cases}\tag{6.24}$$

ただし，

$$a(u,v)=\sum_{i,j}\frac{1}{2}\int_D a^{ij}(x)D_iuD_jvdx-\sum_i\int_D\tilde{b}^i(x)D_iu\ vdx+\int_D c(x)uvdx$$

【定理 6.7.1】 $f\in\mathbf{L}^\infty(D)$, $a^{ij}\in\mathbf{W}^{1,2}(D)\cap\mathbf{L}^\infty(D)$ とし，(6.21)-(6.23) を仮定する．このとき，(6.24) は一意解 $u\in\mathbf{W}^{1,2}(D)\cap\mathbf{L}^\infty(D)$ をもつ．

まず，十分大きな $\gamma>0$ をとれば

$$a(u,u)+\gamma(u,u)\geq\lambda_0\| u \|^2_{\mathbf{W}^{1,2}},\quad \lambda_0>0$$

とできることに注意しよう．なぜなら，

$$|\sum_i\int\tilde{b}^iD_iuudx|\leq M\| Du \|_2\| u \|_2\leq\frac{\lambda}{2}\| Du \|_2^2+\frac{M^2}{2\lambda}\| u \|_2^2$$

であり，

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int a^{ij}D_iuD_judx\geq\frac{\nu_1}{2}\| Du \|_2^2$$

であるので，$\lambda<\nu_1, \frac{M^2}{2\lambda}<\gamma$ ととればよい．このとき，Lax-Milgram の定理（[17] 参照）により，$\forall g\in\mathbf{L}^2$ に対して一意的な元 $u\in\mathbf{W}_0^{1,2}$ があり，

$$a(u,v)+\gamma(u,v)=(g,v),\quad \forall v\in\mathbf{W}_0^{1,2}\tag{6.25}$$

を満たすことがわかる．ここで，次の補題を用意しよう．

【補題 6.7.2】 定理 6.7.1 の条件の下で，$g \in \mathbf{L}^{\infty}$ ならば，(6.25) の解 は $u \in \mathbf{L}^{\infty}$ となり，

$$\| u \|_{\infty} \leq \frac{1}{\gamma + c_0} \| g \|_{\infty} \tag{6.26}$$

証明　$K = \frac{\|g\|_{\infty}}{\gamma+c_0}$ とおくとき，$(u-K)_+ \in \mathbf{W}_0^{1,2}(D)$ で $a((u-K)_-, (u-K)_+) = 0$ であることに注意する．

$$a_0(u, v) = a(u, v) - (c(x)u, v)$$

とおくとき，

$$a(u, (u-K)_+) + \gamma(u, (u-K)_+) = (g, (u-K)_+)$$

より，

$$\begin{aligned} &a_0(u-K, (u-K)_+) + (c(x)(u-K), (u-K)_+) + K(c(x), (u-K)_+) \\ &\quad + \gamma(u-K, (u-K)_+) + K\gamma(1, (u-K)_+) = (g, (u-K)_+) \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} &a((u-K)_+, (u-K)_+) + \gamma((u-K)_+, (u-K)_+) \\ &\quad + (K(c_0+\gamma) - \| g \|_{\infty}, (u-K)_+) \leq 0 \end{aligned}$$

K のとり方より

$$\lambda_0((u-K)_+, (u-K)_+) \leq 0$$

すなわち，$u \leq K$ がわかる．同様にして $u \geq -K$ も示される．■

定理 6.7.1 の証明　$u_0 \in \mathbf{W}_0^{1,2}(D)$ を

$$a(u_0, v) + \gamma(u_0, v) = (f, v), \quad \forall v \in \mathbf{W}_0^{1,2}$$

の解とし，u_n，$n = 1, 2, \cdots$ を

$$a(u_n, v) + \gamma(u_n, v) = (f + \gamma u_{n-1}, v), \quad \forall v \in \mathbf{W}_0^{1,2} \tag{6.27}$$

の解とする．このとき，

$$a(u_n - u_{n-1}, v) + \gamma(u_n - u_{n-1}, v) = \gamma(u_{n-1} - u_{n-2}, v)$$

であるから，上の補題により，

$$\| u_n - u_{n-1} \|_\infty \le \frac{\gamma}{\gamma + c_0} \| u_{n-1} - u_{n-2} \|_\infty$$

したがって

$$\begin{aligned} \| u_n - u_m \|_\infty &\le \| u_1 - u_0 \|_\infty (\beta^{n-1} + \beta^{n-2} + \cdots + \beta^m) \\ &\le \| u_1 - u_0 \|_\infty \frac{\beta^m}{1-\beta} \end{aligned}$$

$n > m$, $\beta = \frac{\gamma}{\gamma + c_0} < 1$ であるから $\exists u \in \mathbf{L}^\infty$ で，$\| u_n - u \|_\infty \to 0$ となるが，また (6.27) より，

$$\lambda_0 \| u_n \|^2_{\mathbf{W}^{1,2}} \le \| f + \gamma u_{n-1} \|_2 \| u_n \|_2 \le K, \ \ \exists K > 0$$

となり，$\{u_n\}$ は $\mathbf{W}^{1,2}$ で弱コンパクト，したがって必要ならば部分列をとって，

$$u_n \to u, \ \ \mathbf{W}^{1,2} \text{ 弱収束}$$

ゆえに，(6.27) から

$$a(u, v) + \gamma(u, v) = (f + \gamma u, v), \quad \forall v \in \mathbf{W}_0^{1,2}$$

すなわち，(6.24) の解を得る．■

！注意　定理 6.7.1 の条件の上に，$a^{ij} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(D)$ で D が滑らかな境界 $(\mathbf{C}^2)$ をもつとき，$f \in \mathbf{L}^p$, $1 < p < \infty$ に対して (6.24) は一意解 $u \in \mathbf{W}^{2,p}(D)$ をもち，

$$\| u \|_{\mathbf{W}^{2,p}} \le K \| f \|_p, \ \ \exists K > 0 \tag{6.28}$$

となることが，類似した証明とブートストラップ法を用いて示される．また，このとき，仮定 (6.23) は $0 \le c(x) \le M$ として成立する ([2])．より一般に，a^{ij} の条件は $a \in \mathbf{C}^0(\bar{D})$ まで弱められる ([17])．

さて，D の境界は十分滑らかとし，(6.21), (6.22) を仮定し，$a^{ij} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(D)$ したがってリプシッツ連続と仮定する．$0 \le c(x) \le M$ とする．a^{ij} はリプシッツ連続関数として，$\tilde{b}(x)$, $c(x)$ は有界ボレル可測関数として R^N 全体に拡張しておく．$\sigma(x) = (a(x))^{\frac{1}{2}}$ ととれば，σ もリプシッツになることが知られている ([42] 参照)．

まず，フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}; \mathcal{F}_t)$ で定義されたブラウン運動 $\tilde{B}_t$ を用意し，確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t)d\tilde{B}_t, \ \ X_0 = x$$

を考えると，この方程式は 定理 3.2.1 により一意解をもつ．

$$b^i(x) = \tilde{b}^i(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} D_k a^{ki}(x)$$

とおき，

$$Z_t = e^{\int_0^t b^* \sigma^{-1}(X_s)d\tilde{B}_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^* a^{-1} b(X_s)ds}$$

により，

$$\frac{dP}{d\tilde{P}}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$$

で P を定義するとき，定理 3.6.1 とその注意で見たように

$$B_t = \tilde{B}_t - \int_0^t \sigma^{-1} b(X_s)ds$$

は P に関してブラウン運動となり，したがって X_t は

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, \ \ X_0 = x$$

の解になる．

さて，$f \in \mathbf{L}^N(D)$ のとき，(6.20) の解 $u \in \mathbf{W}^{2,N}$ をこの確率微分方程式により定まる拡散過程 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P_x, X_t, \theta_t)$ で表しておこう．$P_x = P \circ (X_\cdot)^{-1}$.

まず，(6.20) で $c(x) \equiv 0$ のときの $f = -1$ に対する解を η とすると，(6.28) より，

$$\| \eta \|_{\mathbf{W}^{2,p}} \le K|D|^{\frac{1}{p}}, \ \ 1 < \forall p < \infty$$

であるから，ソボレフの補題（ [17] 参照 ）により η, $D_i\eta \in \mathbf{C}(\bar{D})$ となることに注意する．この η に対して 定理 6.6.2 を適用して

$$\eta(X_t) - \eta(X_0) = \sum_{i,j}\int_0^t \sigma_j^i(X_s)D_i\eta(X_s)dB_s^j + t$$

を得るから $\tau_D = \inf\{t; X_t \in D^c\}$ とするとき，

$$E_x[\tau_D \wedge t] = E_x[\eta(X_{t\wedge\tau_D})] - \eta(x)$$

より，

$$E_x[\tau_D] < \infty \tag{6.29}$$

$u \in \mathbf{W}^{2,N}$ を (6.20) の解とする．定理 6.6.2 により，$\varphi_s = \int_0^s c(X_r)dr$ とおくとき，

$$e^{-\varphi_t}u(X_t) - u(x) = \sum_{i,j}\int_0^t \sigma_j^i(X_s)D_iu(X_s)e^{-\varphi_s}dB_s^j - \int_0^t f(X_s)e^{-\varphi_s}ds$$

から

$$u(x) = E_x[\int_0^{t\wedge\tau_D} e^{-\varphi_s}f(X_s)ds + e^{-\varphi_{t\wedge\tau_D}}u(X_{t\wedge\tau_D})]$$

となるが (6.29) より $P_x(\tau_D < \infty) = 1$ なので $t \to \infty$ として

$$u(x) = E_x[\int_0^{\tau_D} e^{-\varphi_s}f(X_s)ds]$$

となる．

! 注意　(6.20) で境界条件を $u|_{\partial D} = \psi$ とするとき，$\psi \in \mathbf{W}^{2,N}(D)$ ならば $u-\psi \in \mathbf{W}_0^{1,2}(D)$ なる (6.24) の解 $u \in \mathbf{W}^{2,N}$ が上の条件の下で存在し，この解 u は

$$u(x) = E_x[\int_0^{\tau_D} e^{-\varphi_s}f(X_s)ds + e^{-\varphi_{\tau_D}}\psi(X_{\tau_D})]$$

と表される．

6.8　最適停止問題と変分不等式

5.6 節で考察した処罰問題の極限として最適停止問題を導くが，簡単のため，問題を有界領域 D 上で考察することにする．ディリクレ条件をつけた処罰方程式

$$\begin{aligned}&(\alpha - L)w_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - g)_+ = f, \quad \alpha > 0\\ &w_\epsilon|_{\partial D} = 0\end{aligned} \tag{6.30}$$

をまず考える．ここで，

$$Lu = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} D_i(a^{ij}(x)D_j u) + \tilde{b}^i D_i u$$

とし，次の条件を仮定する．$a^{ij} = a^{ji}$ で

$$\nu_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \nu_2|\xi|^2, \ \ \nu_1, \nu_2 > 0 \tag{6.31}$$

$$|\tilde{b}| \le M \tag{6.32}$$

$$|f| + |g| \le M \tag{6.33}$$

(6.30) を弱い形で表して

$$\begin{cases} a(u,v) + \alpha(u,v) + (\frac{1}{\epsilon}(u-g)_+, v) = (f,v), \ \ \forall v \in \mathbf{W}_0^{1,2} \\ u \in \mathbf{W}_0^{1,2} \end{cases} \tag{6.34}$$

ただし，

$$a(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_D a^{ij}(x)D_i u D_j v dx - \sum_i \int_D \tilde{b}^i(x) D_i u v dx$$

で (u,v) は $\mathbf{L}^2$ 内積である．このとき，

【定理 6.8.1】 (6.31)-(6.33) の条件の下で (6.34) は一意解 $w_\epsilon \in \mathbf{W}_0^{1,2}(D) \cap \mathbf{L}^\infty$ をもつ．

証明 まず，十分大きな $\lambda > 0$ をとると，

$$a(u,u) + \lambda(u,u) \ge \lambda_0 \parallel u \parallel_{\mathbf{W}^{1,2}}, \ \ \exists \lambda_0 > 0 \tag{6.35}$$

となることに注意する．(6.35) を満たす λ をとり，

$$Hu = \frac{1}{\epsilon}(u-g)_+$$

とおき，$f_1 \in \mathbf{L}^\infty$ に対して

$$\begin{cases} a(u,v)+(\alpha+\lambda)(u,v)+(Hu,v)=(f_1,v), & \forall v \in \mathbf{W}_0^{1,2} \\ u \in \mathbf{W}_0^{1,2} \cap \mathbf{L}^\infty \end{cases} \tag{6.36}$$

の一意可解性を示そう．$H:\mathbf{L}^\infty \mapsto \mathbf{L}^\infty$ で，

$$\| Hu_1 - Hu_2 - \mu(u_1-u_2) \|_\infty \le \mu \vee |\mu - \frac{1}{\epsilon}| \, \| u_1 - u_2 \|_\infty, \quad \mu \ge 0 \tag{6.37}$$

となることに注意しておこう．$\lambda > \frac{1}{\epsilon}$ となるようにあらかじめ大きく λ をとっておき，$\varphi \in \mathbf{L}^\infty$ に対して線形方程式

$$a(u,v)+(\alpha+\lambda)(u,v)=(f_1-H\varphi,v), \quad \forall v \in \mathbf{W}_0^{1,2} \tag{6.38}$$

を考えるが，定理 6.7.1 でみたように，(6.38) は一意解 $u \equiv T\varphi$ をもつが，補題 6.7.2 によれば

$$\begin{aligned} \| T\varphi_1 - T\varphi_2 \|_\infty &\le \frac{1}{\lambda+\alpha} \| H\varphi_1 - H\varphi_2 \|_\infty \\ &\le \frac{1}{\epsilon(\lambda+\alpha)} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_\infty \end{aligned}$$

$\lambda > \frac{1}{\epsilon}$ であったので，$T:\mathbf{L}^\infty \mapsto \mathbf{L}^\infty$ は縮小写像となり，縮小写像の原理により，一意的な元 $u \in \mathbf{L}^\infty$ があり，$Tu=u$ となる．すなわち，

$$\begin{cases} a(u,v)+(\alpha+\lambda)(u,v)=(f_1-Hu,v), & \forall v \in \mathbf{W}_0^{1,2} \\ u \in \mathbf{W}_0^{1,2} \cap \mathbf{L}^\infty \end{cases} \tag{6.39}$$

の一意解が得られた．

次に u_0 を (6.39) で $f_1=f$ とした解とし，$u_n \in \mathbf{W}_0^{1,2} \cap \mathbf{L}^\infty, n=1,2,\cdots$ を

$$a(u_n,v)+(\alpha+\lambda)(u_n,v)=(f+\lambda u_{n-1}-Hu_{n-1},v), \quad \forall v \in \mathbf{W}_0^{1,2} \tag{6.40}$$

の解とするが，再び補題 6.7.2 により，

$$\begin{aligned} \| u_n - u_{n-1} \|_\infty &\le \frac{1}{\lambda+\alpha} \| \lambda(u_{n-1}-u_{n-2}) - (Hu_{n-1}-Hu_{n-2}) \|_\infty \\ &\le \frac{|\lambda-\frac{1}{\epsilon}| \vee \lambda}{\lambda+\alpha} \| u_{n-1} - u_{n-2} \|_\infty \end{aligned}$$

より，$\exists w_\epsilon \in \mathbf{L}^\infty$ で $\| u_n - w_\epsilon \|_\infty \to 0$ となることがわかるが，(6.40) より，

$$a(u_n, u_n) + (\alpha + \lambda)(u_n, u_n) = (f + \lambda u_{n-1} - H u_{n-1}, u_n) \le C,\ \exists C > 0$$

となるから，(6.35) より，$\| u_n \|_{\mathbf{W}^{1,2}} \le C$ となり，必要なら部分列をとることにより，$n \to \infty$ のとき，$u_n \to w_\epsilon$, $\mathbf{W}^{1,2}$ 弱収束 がわかる．したがってもう一度 (6.40) より

$$a(w_\epsilon, v) + (\alpha + \lambda)(w_\epsilon, v) = (f + \lambda w_\epsilon - H w_\epsilon, v)$$

すなわち，(6.34) の解 $w_\epsilon \in \mathbf{W}_0^{1,2}(D) \cap \mathbf{L}^\infty$ が得られた． ■

! 注意 D が滑らかな境界をもち，$a^{ij}(x) \in \mathbf{W}^{1,\infty}$ となるとき，さらに，(6.31), (6.32) を仮定すれば，$f, g \in \mathbf{L}^p$, $2 \le p < \infty$ に対して $w_\epsilon \in \mathbf{W}^{2,p}$ となる一意解の存在が示される（[2] 参照）．

さて，$a^{ij}(x) \in \mathbf{W}^{1,\infty}$ とし，

$$b^i(x) = \tilde{b}^i(x) + \frac{1}{2} \sum_k D_k a^{ki}(x)$$

とおき，6.7 節のようにフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ で確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t + b(X_t) dt, \quad X_0 = x \tag{6.41}$$

$\sigma(x) = (a(x))^{\frac{1}{2}}$ を考える．また，$P_x = P \circ (X_.)^{-1}$ とする． このとき，次の定理を得る．

【定理 6.8.2】 D は滑らかな境界をもつとし，$a^{ij}(x) \in \mathbf{W}^{1,\infty}$ とする．さらに，(6.31), (6.32) を仮定し，$f, g \in \mathbf{L}^N$ とする．このとき，(6.30) の解 $w_\epsilon \in \mathbf{W}^{2,N}$ は

$$w_\epsilon(x) = \inf_{\gamma \in \mathcal{A}d_\epsilon} E_x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\alpha t - \int_0^t \gamma_s ds} \{f(X_t) + \gamma_t g(X_t)\} dt\right] \tag{6.42}$$

である．ここで $\mathcal{A}d_\epsilon$ は 5.6 節のものである．

証明　$w_\epsilon \in \mathbf{W}^{2,N}$ で (6.30) を満たすことから定理 6.6.2 を使って $\forall\gamma_s \in \mathcal{A}d_\epsilon$ に対して

$$e^{-\alpha t\wedge\tau_D - \int_0^{t\wedge\tau_D}\gamma_s ds} w_\epsilon(X_{t\wedge\tau_D}) - w_\epsilon(X_0) \\ - \int_0^{t\wedge\tau_D} e^{-\alpha s - \int_0^s \gamma_r dr}(L-\alpha-\gamma_s)w_\epsilon(X_s)ds$$

は P_x に関して，マルチンゲールである．ただし， $\tau_D = \inf\{t; X_t \in D^c\}$, したがって

$$w_\epsilon(x) = E_x[\int_0^{t\wedge\tau_D}(f(X_s) - \frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - g)_+(X_s) + \gamma_s w_\epsilon(X_s))e^{-\alpha s - \int_0^s \gamma_r dr}ds] \\ + E_x[e^{-\alpha t\wedge\tau_D - \int_0^{t\wedge\tau_D}\gamma_r dr} w_\epsilon(X_{t\wedge\tau_D})]$$

$t \to \infty$ として

$$w_\epsilon(x) = E_x[\int_0^{\tau_D}(f(X_s) - \frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - g)_+(X_s) + \gamma_s w_\epsilon(X_s))e^{-\alpha s - \int_0^s \gamma_r dr}ds]$$

であるが

$$-\frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - g)_+ = \inf_{0\le\gamma\le\frac{1}{\epsilon}}\{\gamma g - \gamma w_\epsilon\} \\ = \frac{1}{\epsilon}1_{F_\epsilon}(x)(g(x) - w_\epsilon(x)) \le \gamma g - \gamma w_\epsilon, \quad 0 \le \forall\gamma \le \frac{1}{\epsilon}$$

なることを使えば定理が示される． ■

【定理 6.8.3】　(6.31) と (6.32) を仮定する．D は滑らかな境界をもつとし，$a^{ij}(x) \in \mathbf{W}^{1,\infty}$ とする．$f \in \mathbf{L}^p$, $p > \frac{N}{2}$, $p \ge 2$ とし，

$$g \in \mathbf{W}^{1,p},\ Lg \in \mathbf{L}^p \quad g|_{\partial D} \ge 0 \tag{6.43}$$

と仮定する．このとき，変分不等式

$$\begin{cases} (\alpha - L)u \le f, & u \le g,\ u \in \mathbf{W}^{2,p} \\ ((\alpha - L)u - f)(u - g) = 0, & u|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{6.44}$$

は一意解をもつ．

【補題 6.8.4】 $\zeta_1,\zeta_2\in\mathbf{L}^\infty$ とするとき，

$$\begin{cases}(\alpha-L)u_i+\lambda u_i\le f+\lambda\zeta_i, & u_i\le g,\ u_i\in\mathbf{W}^{2,p}\\ ((\alpha-L)u_i+\lambda u_i-f-\lambda\zeta_i)(u_i-g)=0, & u_i|_{\partial D}=0\end{cases}\tag{6.45}$$

$i=1,2$ は一意解をもち，

$$\|u_1-u_2\|_\infty\le\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\|\zeta_1-\zeta_2\|_\infty\tag{6.46}$$

証明　定理 6.8.1 の後の注意により，

$$(\alpha+\lambda-L)u_i^\epsilon+\frac{1}{\epsilon}(u_i^\epsilon-g)_+=f+\lambda\zeta_i,\ u_i^\epsilon|_{\partial D}=0\tag{6.47}$$

は一意解 $u_i^\epsilon\in\mathbf{W}^{2,p}$ をもつ．したがって

$$(\alpha+\lambda-L)(u_1^\epsilon-u_2^\epsilon)=\lambda(\zeta_1-\zeta_2)-\{\frac{1}{\epsilon}(u_1^\epsilon-g)_+-\frac{1}{\epsilon}(u_2^\epsilon-g)_+\}$$

$$K=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\|\zeta_1-\zeta_2\|_\infty$$

とおくとき，

$$(\frac{1}{\epsilon}(u_1^\epsilon-g)_+-\frac{1}{\epsilon}(u_2^\epsilon-g)_+,(u_1^\epsilon-u_2^\epsilon-K)_+)\ge 0$$

に注意すれば，補題 6.7.2 と同様にして $u_1^\epsilon-u_2^\epsilon\le K$ がわかり，また同様に，$u_1^\epsilon-u_2^\epsilon\ge -K$ も示されるから

$$\|u_1^\epsilon-u_2^\epsilon\|_\infty\le\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\|\zeta_1-\zeta_2\|_\infty\tag{6.48}$$

次に，(6.45) の解の一意性を示す．$u,\tilde{u}$ を ζ_1 に対する解としよう．このとき，

$$a(u,v-g)+(\alpha+\lambda)(u,v-g)\ge(f+\lambda\zeta_1,v-g),\quad\forall v\le g$$

$$a(u,u-g)+(\alpha+\lambda)(u,u-g)=(f+\lambda\zeta_1,u-g)$$

から

$$a(u,v-u)+(\alpha+\lambda)(u,v-u)\ge(f+\lambda\zeta_1,v-u),\quad\forall v\le g\tag{6.49}$$

したがって，$\tilde{u}$ についても

$$a(\tilde{u},v-\tilde{u})+(\alpha+\lambda)(u,v-\tilde{u})\ge(f+\lambda\zeta_1,v-\tilde{u}),\quad\forall v\le g\tag{6.50}$$

(6.49) の v として $\tilde{u}$, (6.50) の v として u を入れることにより,

$$a(u,\tilde{u}-u)+(\alpha+\lambda)(u,\tilde{u}-u)\geq -a(\tilde{u},u-\tilde{u})-(\alpha+\lambda)(\tilde{u},u-\tilde{u})$$

がわかり，したがって

$$a(\tilde{u}-u,\tilde{u}-u)+(\alpha+\lambda)(\tilde{u}-u,\tilde{u}-u)\leq 0$$

となり，(6.35) より，$u=\tilde{u}$ が得られる．

次に存在を示そう．$\zeta_i=\zeta$, $u_i^\epsilon=u^\epsilon$ としておく．$g|_{\partial D}\geq 0$ であるので

$$(u^\epsilon-g)_+=0,\ x\in\partial D$$

となることに注意しておく．(6.47) より,

$$(\alpha+\lambda-L)(u^\epsilon-g)+\frac{1}{\epsilon}(u^\epsilon-g)_+=f-(\alpha+\lambda-L)g+\lambda\zeta$$

$\psi=u^\epsilon-g$ とおいて，ψ_+^{p-1} との内積をとれば,

$$\begin{aligned}&\frac{p-1}{2}\sum_{i,j}\int a^{ij}D_i\psi_+D_j\psi_+|\psi_+|^{p-2}dx\\&\quad-\sum_i\int\tilde{b}^iD_i\psi_+|\psi_+|^{p-1}dx+(\alpha+\lambda)\int\psi_+^p dx+\frac{1}{\epsilon}\int\psi_+^p dx\\&=\int(f-(\alpha+\lambda-L)g+\lambda\zeta)\psi_+^{p-1}dx\end{aligned}\tag{6.51}$$

λ 十分大とすれば

$$\begin{aligned}&\frac{p-1}{2}\sum_{i,j}\int a^{ij}D_i\psi_+D_j\psi_+|\psi_+|^{p-2}dx-\sum_i\int\tilde{b}^iD_i\psi_+|\psi_+|^{p-1}dx\\&+(\alpha+\lambda)\int\psi_+^p dx\geq 0\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{1}{\epsilon}\int\psi_+^p dx\leq\| f-(\alpha+\lambda-L)g+\lambda\zeta\|_p\|\psi_+\|_p^{\frac{p-1}{p}}$$

すなわち,

$$\frac{1}{\epsilon}\|(u^\epsilon-g)_+\|_p\leq C\tag{6.52}$$

したがって，(6.47) より，定理 6.7.1 の注意 (6.28) より，

$$\| u^\epsilon \|_{\mathbf{W}^{2,p}} \leq C$$

となるから，$\epsilon \to 0$ のとき，必要なら部分列をとって，$u^\epsilon \to \exists u$, $\mathbf{W}^{2,p}$ 弱収束，$\mathbf{W}^{1,p}$ 強収束 がわかる．また (6.52) より，

$$u \leq g \tag{6.53}$$

である．(6.47) より，

$$(\alpha + \lambda - L)u^\epsilon - (f + \lambda\zeta) \leq 0$$

であるから

$$(\alpha + \lambda - L)u - (f + \lambda\zeta) \leq 0 \tag{6.54}$$

となり，(6.47) から

$$\int ((\alpha + \lambda - L)u^\epsilon - (f + \lambda\zeta))(u^\epsilon - g)_- dx = 0$$

であり，$(u^\epsilon - g)_- \to (u - g)_-$, $\mathbf{L}^p$ 強収束 であるから

$$\int ((\alpha + \lambda - L)u - (f + \lambda\zeta))(u - g)_- dx = 0$$

さらに (6.53) と (6.54) より，

$$((\alpha + \lambda - L)u - (f + \lambda\zeta))(u - g) = 0$$

を得る．最後に，ソボレフの補題を使って，$\| u^\epsilon - u \|_\infty \to 0$ となるので (6.48) から (6.46) を得る．■

定理 6.8.3 の証明　補題 6.8.4 によれば，$\zeta \in \mathbf{L}^\infty$ に対して (6.45) の解 u を対応させる作用素 $T : \zeta \mapsto u = T\zeta \in \mathbf{L}^\infty$ は縮小写像である．したがって，一意的な 不動点 $u = Tu$ が存在する．これは，(6.44) の解に他ならない．■

【定理 6.8.5】　定理 6.8.3 の仮定の下で $p = N$ とする．このとき，(6.44) の解 u は

$$u(x) = \inf_\tau E_x[\int_0^{\tau \wedge \tau_D} e^{-\alpha t} f(X_t) dt + e^{-\alpha \tau \wedge \tau_D} g(X_{\tau \wedge \tau_D})] \tag{6.55}$$

を満たす．またこの最適停止問題の最適停止時刻は $F = \{x; u(x) = g(x)\}$ とするとき，τ_F で実現される．

証明　u に対して 定理 6.6.2 を適用して，

$$e^{-\alpha t\wedge\tau_D}u(X_{t\wedge\tau_D}) - u(x) - \int_0^{t\wedge\tau_D} e^{-\alpha s}(L-\alpha)u(X_s)ds$$

はマルチンゲールだから，(6.44) より

$$\begin{aligned} u(x) &\le E_x[\int_0^{\tau_D\wedge\tau} e^{-\alpha s}f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau_D\wedge\tau}u(X_{\tau_D\wedge\tau})] \\ &\le E_x[\int_0^{\tau_D\wedge\tau} e^{-\alpha s}f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau_D\wedge\tau}g(X_{\tau_D\wedge\tau})] \end{aligned}$$

さらに，(6.44) より

$$\begin{aligned} u(x) &= E_x[\int_0^{\tau_D\wedge\tau_F} e^{-\alpha s}f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau_D\wedge\tau_F}u(X_{\tau_D\wedge\tau_F})] \\ &= E_x[\int_0^{\tau_D\wedge\tau_F} e^{-\alpha s}f(X_s)ds + e^{-\alpha\tau_D\wedge\tau_F}g(X_{\tau_D\wedge\tau_F})] \end{aligned}$$

として定理が得られる．■

***!* 注意**　ここでは g に対して強い条件 (6.43) を課した．しかしながら，(6.43) を

$$g \in \mathbf{C}(\bar{D}),\ \ g|_{\partial D} \ge 0$$

と弱めても，(6.44) の弱い形：

$$\begin{cases} a(u, v-u) + \alpha(u, v-u) \ge (f, v-u), & \forall v \le g, \\ u \le g, & u \in \mathbf{W}_0^{1,2} \cap \mathbf{L}^\infty \end{cases}$$

が一意解 $u \in \mathbf{C}(\bar{D})$ をもち，その解で最適停止問題 (6.55) の値関数が特徴づけられることがわかる（[2]）．

7

付　　録

7.1 グロンウォール不等式

【定理 7.1.1】 $m(t)$ は連続で，$\alpha(t)$ は可積分とし，定数 $\beta \geq 0$ に対して

$$0 \leq m(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t m(s)ds, \quad 0 \leq t$$

ならば

$$m(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds$$

である．

7.2 一様可積分確率変数列

【定義 7.2.1】 確率変数列 $\{X_n\}$ が一様可積分であるとは次のときをいう．

$$\lim_{c \to \infty} \sup_n E[|X_n|; |X_n| > c] = 0$$

【定理 7.2.2】 $\{X_n\}$ を一様可積分確率変数列とする．このとき，

$$E[\liminf_n X_n] \leq \liminf_n E[X_n] \leq \limsup_n E[X_n] \leq E[\limsup_n X_n]$$

である．またさらに，$\lim_n X_n = X$ a.s. を仮定するとき，X は可積分で

$$\lim_n E[|X_n - X|] = 0$$

となる．

証明　一様可積分性を使って $\forall\epsilon > 0$ に対して $\exists c > 0$ があり，

$$\sup_n |E[X_n; X_n < -c]| < \epsilon$$

とできる．Fatou の補題より，

$$E[\liminf_n X_n] \le E[\liminf_n X_n 1_{\{X_n \ge -c\}}] \le \liminf_n E[X_n 1_{\{X_n \ge -c\}}]$$

であるが，

$$E[X_n] = E[X_n; X_n < -c] + E[X_n; X_n \ge -c]$$

であるから，

$$E[\liminf_n X_n] - \epsilon \le \liminf_n E[X_n]$$

ϵ は任意であったから

$$E[\liminf_n X_n] \le \liminf_n E[X_n]$$

$\limsup_n E[X_n] \le E[\limsup_n X_n]$ も同様にして示される．

後半はルベーグの収束定理と前半部分を使えばよい．■

また $\{X_n\}$ が一様可積分ならば

$$\sup_n E[|X_n|] < \infty$$

である．実際 任意の ϵ に対して $c > 0$ を十分大きくとれば

$$\sup_n E[|X_n|] \le \sup_n E[|X_n|; |X_n| > c] + \sup_n E[|X_n|; |X_n| \le c] \le \epsilon + c$$

だからである．

一様可積分となるための一つの判定条件を与えておく．

【命題 7.2.3】　$\{X_n\}$ を可積分確率変数列とし，$H(t)$ を $[0,\infty)$ で定義された非負非減少関数で

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \infty$$

$$\sup_n E[H(|X_n|)] < \infty$$

なるものとする．このとき，$\{X_n\}$ は一様可積分となる．

証明　$K = \sup_n E[H(|X_n|)]$ とおき，$\epsilon > 0$ に対して $a = \frac{K}{\epsilon}$ ととるとき，仮定より $\exists c > 0$ があって $\frac{H(t)}{t} \geq a$, $\forall t \geq c$ とできるから

$$E[|X_n|; |X_n| \geq c] \leq \frac{1}{a} E[H(|X_n|); |X_n| \geq c] \leq \frac{K}{a} = \epsilon$$

がすべての $n \geq 1$ に対して成立する．■

7.3　ディンキン系定理 ([21])

Ω を集合とし，Ω の部分集合からなる族 $\mathcal{D}$ が次の条件を満たすときディンキン系であるという．

i) $\Omega \in \mathcal{D}$

ii) $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$ ならば $B \backslash A \in \mathcal{D}$

iii) $A_n \in \mathcal{D}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$

【定理 7.3.1】　$\mathcal{C}$ を Ω の部分集合からなる族で，$A, B \in \mathcal{C}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{C}$ なるものとする．$\mathcal{D}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ を含む最小のディンキン系とするとき，$\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$

7.4　Kolmogorov-Chentsov の定理 ([24])

$D \subset R^N$, $\mathbf{B}$ をバナッハ空間とし，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された，D をパラメータ空間とする確率場 $X(x)$, $x \in D$ は $\mathbf{B}$ に値をとるものとする．

【定理 7.4.1】　ある定数 $\gamma, c > 0$ と $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha_i} < 1$ なる $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$ があり，

$$E[\| X(x) - X(y) \|_{\mathbf{B}}^{\gamma}] \leq c \sum_{i=1}^{N} |x^i - y^i|^{\alpha_i}, \;\; x, y \in D$$

を満たすとき，$X(x)$ は連続な修正をもつ．ただし，$\| \cdot \|_{\mathbf{B}}$ はバナッハ空間 $\mathbf{B}$ のノルム．

7.5 正則条件付き確率 ([18])

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ とその部分 σ 加法族 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ が与えられたとき，

$$P(\omega,A):\Omega\times\mathcal{F}\mapsto[0,1]$$

が $\mathcal{G}$ に対する正則条件付き確率であるとは

i) $\forall\omega\in\Omega$ に対し $P(\omega,\cdot)$ は $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度

ii) $\forall A\in\mathcal{F}$ に対し，$P(\cdot,A)$ は $\mathcal{G}$ 可測

iii) $\forall A\in\mathcal{F},\ B\in\mathcal{G}$ に対し，

$$P(A\cap B)=\int_B P(\omega,A)P(d\omega)$$

なるときをいう．ここで iii) は次と同値であることに注意する．

$$E[X;B]=\int_B(\int X(\omega')P(\omega,d\omega'))P(d\omega),\ \ \forall B\in\mathcal{G}$$

$(E,\mathcal{E})$ が標準可測空間であるとは，1 対 1 写像 $\varphi:(E,\mathcal{E})\mapsto(R,\mathcal{B}(R))$ があって

i) $\varphi(E)\in\mathcal{B}(R)$

ii) φ は $\mathcal{E}$ 可測，すなわち，$\varphi^{-1}(A)\in\mathcal{E},\ A\in\varphi(E)\cap\mathcal{B}(R)$

iii) φ^{-1} は $\mathcal{B}(R)/\mathcal{E}$ 可測，すなわち，$\varphi(B)\in\varphi(E)\cap\mathcal{B}(R),\ B\in\mathcal{E}$

なるときをいう．

【定理 7.5.1】 $(\Omega,\mathcal{F})$ を標準可測空間とし，P をその上で定義された確率測度とする．このとき，部分 σ 加法族 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{G}$ に対する正則条件付き確率 $P(\omega,A),\omega\in\Omega,\ A\in\mathcal{F}$ が一意的に存在する

【定理 7.5.2】 $(\Omega,\mathcal{F})$ を標準可測空間とし，P をその上で定義された確率測度とする．$(S,\mathcal{S})$ を可測空間とし，ξ を $\mathcal{F}/\mathcal{S}$ 可測な確率変数とする．このとき，$\xi=x$ が与えられた下での正則条件付き確率，すなわち，次の 3 条件を満たす系 $\{p(x,A)\}_{x\in S,A\in\mathcal{F}}$ が存在する．

i) $\forall x\in S$ に対し $p(x,\cdot)$ は $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度．

ii)　$\forall A \in \mathcal{F}$ に対し $p(\cdot, A)$ は $\mathcal{S}$ 可測関数.

iii)　$A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{S}$ に対し

$$P(A \cap \{\omega; \xi(\omega) \in B\}) = \int_B p(x, A)(P \circ \xi^{-1})(dx)$$

さらに，もう一つ i)-iii) を満たす $p'(x, A)$ が存在すれば，ある $\mathcal{N} \in \mathcal{S}$ で $(P \circ \xi^{-1})(\mathcal{N}) = 0$ かつ,

$$p(x, A) = p'(x, A), \ \ \forall A \in \mathcal{F}, \ x \notin \mathcal{N}$$

なるものが存在する.

7.6　Kolmogorov の拡張定理（定理 1.3.1）の証明

【補題 7.6.1】　P_1, P_2, $\cdots$ がそれぞれ $(R^N, \mathcal{B}(R^N))$, $(R^{2N}, \mathcal{B}(R^{2N}))$, $\cdots$上の確率測度で

$$P_{n+1}(B \times R) = P_n(B), \ \ B \in \mathcal{B}(R^{nN}) \tag{7.1}$$

を満たすならば，$((R^N)^\infty, \mathcal{B}((R^N)^\infty)$ 上の確率測度 P があり,

$$P(B) = P_n(B), \ \ B \in \mathcal{B}(R^{nN}) \tag{7.2}$$

を満たす.

証明　$\pi_n : (R^N)^\infty \mapsto (R^N)^n$ を

$$\pi_n(\omega) = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in (R^N)^n, \ \ \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in (R^N)^\infty$$

と定義するとき,

$$\mathcal{C} = \{\pi_n^{-1}(B); B \in \mathcal{B}(R^{nN}), \ n = 1, 2, \cdots\}$$

は $(R^N)^\infty$ の有限加法族を定義する. $F \in \mathcal{C}$ に対して

$$P(F) = P_n(F), \ \ F = \pi_n^{-1}(B), \ B \in \mathcal{B}(R^{nN})$$

と定義するとき，P が $\mathcal{C}$ 上で有限加法的であることを注意しよう.

$n \geq k$ に対して $\pi_{n,k}((\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)) = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k)$ と定義するとき，仮定より，$P_n(\pi_{n,n-1}^{-1}(B^0)) = P_{n-1}(B^0)$, $B^0 \in \mathcal{B}(R^{(n-1)N})$ であるから，

$$P_n(\pi_{n,k}^{-1}(B^0)) = P_k(B^0), \ \ B^0 \in \mathcal{B}(R^{kN})$$

また $\pi_n^{-1}(\pi_{n,k}^{-1}(B^0)) = \pi_k^{-1}(B^0)$ に注意する．したがって $F_1,F_2,\cdots,F_k \in \mathcal{C}$ で $F_i \cap F_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\cdots,k$ なるものをとるとき，$\exists n$ で $F_i = \pi_n^{-1}(F_i^0)$, $F_i^0 \in \mathcal{B}(R^{nN})$, $i = 1,2,\cdots,k$ としてよい．また F_i^0 も互いに素な集合である．よって，

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^k F_i) &= P(\bigcup_{i=1}^k \pi_n^{-1}(F_i^0)) = P_n(\bigcup_{i=1}^k F_i^0) \\ &= \sum_{i=1}^k P_n(F_i^0) = \sum_{i=1}^k P(\pi_n^{-1}(F_i^0)) = \sum_{i=1}^k P(F_i) \end{aligned}$$

となり有限加法的であることが示された．

次に $F_k \downarrow \emptyset$ のときに，$P(F_k) \to 0, k \to \infty$ を示す．そのために，$\lim_{k\to\infty} P(F_k) = \epsilon > 0$ と仮定しよう．一般性を失わず，$F_k = \pi_k^{-1}(F_k^0)$, $F_k^0 \in \mathcal{B}(R^{kN})$ としてよい．また P_k は $(R^{kN}, \mathcal{B}(R^{kN}))$ 上の確率測度なので，上で与えられた ϵ に対して

$$P_k(F_k^0 \backslash A_k^0) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

となるコンパクト集合 $A_k^0 \subset F_k^0$ がある．したがって定義から

$$P(\pi_k^{-1}(F_k^0 \backslash A_k^0)) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

である．$B_k = \bigcap_{i=1}^k \pi_i^{-1}(A_i^0) \subset F_k$ とおくとき，

$$\begin{aligned} P(F_k) - P(B_k) &= P(\pi_k^{-1}(F_k^0) \backslash B_k) \leq \sum_{i=1}^k P(\pi_k^{-1}(F_k^0) \backslash \pi_i^{-1}(A_i^0)) \\ &\leq \sum_{i=1}^k P(\pi_i^{-1}(F_i^0) \backslash \pi_i^{-1}(A_i^0)) < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

より，$\lim_{k\to\infty} P(B_k) \geq \frac{\epsilon}{2} > 0$ を得る．$\omega = (\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \cdots) \in B_k$ とするとき，

$$\omega = (\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \cdots, \omega_k^{(k)}) \in \pi_k(B_k) = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^0$$

であるから k_{1j} を $\omega_1^{(k_{1j})}$ が収束する部分列，k_{2j} を k_{1j} の部分列で $\omega_2^{(k_{2j})}$ が収束する部分列，ととってゆけば，$\lim_{j\to\infty} \omega_l^{(k_{lj})} \in \bigcap_{i=1}^{l} A_i^0 = \pi_l(B_l)$, $l = 1, 2,$ となるので $(\omega_1^{(k_{ll})}, \omega_2^{(k_{ll})}, \cdots, \omega_l^{(k_{ll})})$ をとれば

$$\lim_{l\to\infty} w_i^{(k_{ll})} = \omega_i \in \pi_i(B_i), \quad i = 1, 2,$$

より，$(\omega_1, \omega_2, \cdots) \in B_k$，$\forall k$ すなわち，

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \emptyset$$

が示された． ■

定理 1.3.1 の証明 $\mathbf{T} = [0, \infty)$ に対し $\tau = (t_1, t_2,)$, $t_i \in \mathbf{T}$, $i = 1, 2, \cdots$ をとり，

$$P_n^\tau(B) = \mu_{t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n}(B), \ B \in \mathcal{B}(R^{nN})$$

と定義すれば P_n^τ は (7.1) を満たすから $((R^N)^\infty, \mathcal{B}((R^N)^\infty)$ 上の確率測度 P^τ を一意的に定義し，$\pi^\tau(\omega) = (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots, \omega(t_n), \cdots)$, $\omega \in (R^N)^{\mathbf{T}}$, $(\omega_1^0, \omega_2^0, \cdots,) = (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in (R^N)^\infty$, $\pi_k(\omega^0) = (\omega_1^0, \omega_2^0, \cdots, \omega_k^0)$, とおくとき，

$$P^\tau \circ \pi_k^{-1} = \mu_{t_1, t_2, \cdots, t_k} \tag{7.3}$$

ここで，

$$\mathcal{B} = \sigma\{(\pi^\tau)^{-1}(B); B \in \mathcal{B}((R^N)^\infty), \ \tau \subset \mathbf{T}, \ \text{可算}\}$$

とし，$P((\pi^\tau)^{-1}(B) = P^\tau(B)$ とするとき，この P が $\mathcal{B}$ 上の確率測度を一意的に定義することを示す．

$$B = (\pi^{\tau_1})^{-1}(B_1^0) = (\pi^{\tau_2})^{-1}(B_2)^0 \ \ B_i^0 \in \mathcal{B}((R^N)^\infty), \ i = 1, 2$$

とするとき，ある　$B_3^0 \in \mathcal{B}((R^N)^\infty)$ があり，$B = (\pi^{\tau_1 \cup \tau_2})^{-1}(B_3^0)$ であるので $\tau \subset \tau' \subset \mathbf{T}$, とするとき，$P^\tau(B) = P^{\tau'}(B)$ をいえばよいがこれは (7.3) から明らかである．P の可算加法性については，$B_n = (\pi^{\tau_n})^{-1}(B_n^0)$, $B_n^0 \in \mathcal{B}((R^N)^\infty)$ とし，B_n は互いに素な集合とする．このとき，$\bigcup_{n=1}^\infty \tau_n = \tau$ は可算集合なので

$$P(\bigcup_{n=1}^\infty B_n) = P(\bigcup_{n=1}^\infty (\pi^{\tau_n})^{-1}(B_n^0)) = P^\tau(\bigcup_{n=1}^\infty B_n^0)$$
$$= \sum_{n-1}^\infty P^\tau(B_n^0) = \sum_{n=1}^\infty P((\pi^\tau)^{-1}(B_n^0)) = \sum_{n=1}^\infty P(B_n)$$

■

7.7　粘性解の一意性

まず，有界領域上における非線形方程式の粘性解の一意性に関する結果として次の比較定理が知られている ([9],[19]).

U を有界領域とし，$F \in C(\bar{U} \times R^N \times S^N \times R)$ が与えられているとする．

【定理 7.7.1】　F は退化楕円型で単調であるとし，$x, y \in \bar{U}$, $r \in R$ と

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \le 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

なる $X, Y \in S^N$ に対して

$$F(x, \alpha(x-y), Y, r) - F(x, \alpha(x-y), X, r) \le \rho(\alpha|x-y|^2 + \frac{1}{\alpha}) \tag{7.4}$$

を満たしているとする．ただし，$\rho \in \mathbf{C}([0,\infty); [0,\infty))$ で $\rho(0) = 0$ なるものとする．u を

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t} + F(x, Du, D^2u, u) = 0, & [0,T) \times U \\ u(t,x) = 0, & [0,T) \times \partial U \end{cases} \tag{7.5}$$

の粘性劣解とし，v を (7.5) の粘性優解とする．さらに，$u(T,x) \le v(T,x)$ を満たすならば

$$u(t,x) \le v(t,x), \quad (t,x) \in [0,T) \times U$$

が成立する．

***!* 注意**　i) u, v がともに (7.5) の粘性解で $u(T,x)=v(T,x)$ ならば，この定理から $u(t,x)\le v(t,x)$, $v(t,x)\le u(t,x)$, $\forall(t,x)$ が従い，解の一意性がいえる．

ii) $F=H(x,p)=\sum_{i=1}^N b^i(x)p_i - f(x)$ で $b^i(x)$ はリプシッツ連続で $f(x)$ は U 上一様連続であるとするとき，この F は (7.4) を満たす．

iii) $F=-\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x)X_{ij}$, $a(x)=\sigma\sigma^*(x)$ で $\sigma(x)$ はリプシッツ連続であるとするとき，この F は (7.4) を満たす．

iv) F_1, F_2 が (7.4) を満たすとき，F_1+F_2 も (7.4) を満たす．

v) $F_\gamma(x,p,X,u)$ が同じ ρ に対して (7.4) を満たすとき，$\inf_\gamma F_\gamma(x,p,X,u)$, $\sup_\gamma F_\gamma(x,p,X,u)$ も (7.4) を満たす．

さて，$a^{ij}(x,\gamma)$, $b^i(x,\gamma)$, $c(x,\gamma)$, $f(x,\gamma)$ が 5.1 節の条件 (5.1),(5.2),(5.6)-(5.8) を満たしているものとし，

$$F(t,x,p,X,u) = -\inf_{\gamma\in\Gamma}\{\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x,\gamma)X_{ij} + \sum_{i=1}^N b^i(x,\gamma)p_i - c(x,\gamma)u + f(x,\gamma)\} \tag{7.6}$$

とする．このとき，$F\in\mathbf{C}([0,T)\times R^N\times R^N\times S^N\times R)$ であり，任意の有界領域 $U\subset R^N$ に対して，(7.4) の条件を満たしていることに注意する．さらに，$u(t,x)$ が

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + F(t,x,Du,D^2u,u)=0,\ \ [0,T)\times R^N \tag{7.7}$$

の粘性解であることは，$\tilde{u}(t,x)=u(t,x)e^{\lambda t}$, $\lambda>0$ が

$$-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{F}(t,x,D\tilde{u},D^2\tilde{u},\tilde{u})=0,\ \ [0,T)\times R^N \tag{7.8}$$

の粘性解であることと同値である．ただし，

$$\tilde{F}(t,x,p,X,u) = \lambda u - \inf_{\gamma\in\Gamma}\{\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x,\gamma)X_{ij} + \sum_{i=1}^N b^i(x,\gamma)p_i - c(x,\gamma)u + e^{\lambda t}f(x,\gamma)\}$$

したがって，一般性を失わず

$$\inf_{\gamma} c(x,\gamma) > \lambda > 0 \tag{7.9}$$

と仮定してよい．またこの λ は任意に大きくとれることに注意する．

【定理 7.7.2】 (7.6) で定義された F について，(5.1),(5.2),(5.6)-(5.8) を仮定し，また (7.9) が満たされていると仮定する．$u(t,x)$ は (7.7) の粘性劣解であり，

$$\sup_{[0,T)\times R^N} \frac{u(t,x)}{(|x|^2+1)^m} < \infty \tag{7.10}$$

を満たすものとし，$v(t,x)$ は (7.7) の粘性優解で

$$\inf_{[0,T)\times R^N} \frac{v(t,x)}{(|x|^2+1)^m} > -\infty \tag{7.11}$$

を満たすとする．さらに，$u(T,x) \le v(T,x)$, $x \in R^N$ ならば

$$u(t,x) \le v(t,x), \quad [0,T)\times R^N \tag{7.12}$$

である．

証明　$g(x) = (|x|^2+1)^{m+1}$ とおく．ϵ, $\delta > 0$ に対して，

$$\bar{u}(t,x) = u(t,x) - \epsilon g(x) - \delta$$
$$\bar{v}(t,x) = v(t,x) + \epsilon g(x) + \delta$$

とおく．このとき，仮定より，十分大きく R をとれば

$$\bar{u}(t,x) < 0,\ \ \bar{v}(t,x) > 0,\ \ |x| \ge R,\ t \in [0,T) \tag{7.13}$$

であることに注意する．さらに，

$$D_i g(x) \ = 2(m+1)x_i(|x|^2+1)^m,$$
$$D_{ij} g(x) = 2(m+1)\delta_{ij}(|x|^2+1)^m + 4m(m+1)x_i x_j(|x|^2+1)^{m-1}$$

であり，

$$|a^{ij}(x,\gamma)| \le c(|x|^2+1),\ \ |b^i(x,\gamma)| \le c(|x|+1),\ \ \exists c > 0$$

であることに注意すれば，十分大きな $\lambda > 0$ に対して $\bar{u}$ は

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + F(t, x, Du, D^2u, u) = -\lambda\delta + \epsilon C_1, \quad [0, T) \times R^N$$

の粘性劣解であり，$\bar{v}$ は

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + F(t, x, Du, D^2u, u) = \lambda\delta - \epsilon C_1, \quad [0, T) \times R^N$$

粘性優解であるように，$C_1 > 0$ がとれる．$\delta = \frac{\epsilon C_1}{\lambda}$ ととり，$U = B_R \equiv \{x \in R^N; |x| < R\}$ として，定理 7.7.1 を適用すれば，

$$\bar{u}(t, x) \leq \bar{v}(t, x), \quad [0, T) \times B_R$$

また

$$\bar{u}(t, x) < 0 < \bar{v}(t, x), \quad t \in [0, T),\ x \in B_R^c$$

であったから

$$\bar{u}(t, x) \leq \bar{v}(t, x), \quad [0, T) \times R^N$$

すなわち，

$$u(t, x) - \epsilon g(x) - \delta \leq v(t, x) + \epsilon g(x) + \delta, \quad [0, T) \times R^N$$

$\epsilon \to 0$ として $u(t, x) \leq v(t, x)$, $[0, T) \times R^N$ を得る． ■

問題の略解

第1章

1.1 $B_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$ が N 次元ブラウン運動であるならば，$\forall t > s \geq 0$ に対して

$$E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t - B_s)}] = e^{-\frac{t-s}{2}|\xi|^2} = \prod_{i=1}^N e^{-\frac{t-s}{2}\xi_i^2} = \prod_{i=1}^N E[e^{\sqrt{-1}\xi_i(B_t^i - B_s^i)}]$$

であるから $B_t^i - B_s^i$, $i = 1, 2, \cdots, N$ は独立である．また，任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_l$ に対して $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$, $k = 0, 1, \cdots, l-1$ が独立であるから，$\{B_{t_{k+1}}^i - B_{t_k}^i,\ k = 0, 1, \cdots, l-1\}$, $i = 1, 2, \cdots, N$ は独立である．したがって，$s_0^i < s_1^i < \cdots < s_{l_i}^i$, $i = 1, 2, \cdots, N$ に対して $\{B_{s_k^i}^i,\ k = 0, 1, \cdots, l_i\}, i = 1, 2, \cdots, N$ は独立であるから，$\{B_t^i\}$, $i = 1, 2, \cdots, N$ は独立である．

逆に，B_t^i, $i = 1, 2, \cdots, N$ がそれぞれ一次元ブラウン運動で $\{B_t^i\}$, $i = 1, 2, \cdots, N$ が独立とするとき，

$$\begin{aligned} E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t - B_s)}] &= E[e^{\sum_{i=1}^N \sqrt{-1}\xi_i(B_t^i - B_s^i)}] \\ &= \prod_{i=1}^N E[e^{\sqrt{-1}\xi_i(B_t^i - B_s^i)}] \\ &= \prod_{i=1}^N e^{-\frac{t-s}{2}\xi_i^2} = e^{-\frac{t-s}{2}|\xi|^2} \end{aligned}$$

より，$B_t - B_s$ は平均 0 共分散 $(t-s)E$ の N 次元ガウス型確率変数であり，各 i について $(B_t^i - B_s^i)$ は $\sigma(B_u^i, u \leq s)$ と独立でかつ，$\{B_t^i\}$, $i = 1, 2, \cdots, N$ が独立であるから $B_t - B_s$ は $\sigma(B_u, u \leq s)$ と独立である．

1.2 i) $\varphi(\xi) = E[e^{\sqrt{-1}\xi B_t}] = e^{-\frac{t}{2}\xi^2}$ で，$E[B_t^4] = \varphi^{(4)}(0) = 3t^2$

ii) $E[e^{\sqrt{-1}\xi^* A(B_t - B_s)}] = E[e^{\sqrt{-1}(A\xi)^*(B_t - B_s)}] = e^{-\frac{t-s}{2}|A\xi|^2} = e^{-\frac{t-s}{2}|\xi|^2}$

iii) $E[e^{\sqrt{-1}\xi^* \frac{1}{\sqrt{c}}(B_{ct} - B_{cs})}] = E[e^{\sqrt{-1}(\frac{\xi}{\sqrt{c}})^*(B_{ct} - B_{cs})}] = e^{-\frac{t-s}{2}|\xi|^2}$

1.3 $Q_t(B; \Delta) \leq (\sup_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \vee |B_t - B_{t_n}|)V_t$ だから，$P(V_t < \infty) > 0$ とすると $P(\lim_{|\Delta| \to 0} Q_t(B; \Delta) = 0) > 0$ となり，これは定理 1.2.3 に矛盾．

1.4 $N = 1$ で示す．$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_i)}} e^{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2(t_{i+1} - t_i)}} dx_i$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_{i-1})}} e^{-\frac{(x_{i+1} - x_{i-1})^2}{2(t_{i+1} - t_{i-1})}}$ を示せばよいが，$d_i = t_i - t_{i-1}$ とおくとき，

$-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2d_i}-\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2d_{i+1}}=-\frac{1}{2}\frac{d_i+d_{i+1}}{d_i d_{i+1}}(x_i-\frac{x_{i-1}d_{i+1}+x_{i+1}d_i}{d_i+d_{i+1}})^2-\frac{1}{2}\frac{(x_{i+1}-x_{i-1})^2}{d_i+d_{i+1}}$ で $d_i+d_{i+1}=t_{i+1}-t_{i-1}$ に注意して計算すればよい．

1.5 $\varphi(\xi)=E[e^{\sqrt{-1}\xi(X_t^i-X_s^i)}]=e^{-\frac{t-s}{2}\xi^2}$, $\varphi^{(2n)}(\xi)=\{c_n^0(t-s)^n+\xi^2(t-s)^{n+1}\}(c_n^1+a(\xi,t-s))e^{-\frac{t-s}{2}\xi^2}$, ただし，$a(x,t-s)$ の最低次の項は $\xi^2(t-s)$ の定数倍，となることが帰納法で示され，$E[|X_t^i-X_s^i|^{2n}]=|\varphi^{(2n)}(0)|$ からわかる．

1.6 $\sigma(B_s;s\le t)$ は $A=\{\omega;(B_{t_0},B_{t_1},\cdots,B_{t_k})\in G\}$, $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k=t$, G : 開集合 で生成される σ 加法族であるが，$s_n\nearrow t$, $n\to\infty$ のとき，$B_t=\lim_{n\to\infty}B_{s_n}$ だから $A=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}\{\omega;(B_{t_0},B_{t_1},\cdots,B_{s_n})\in G\}\in\mathcal{F}_{t-}^B$.
$H_n=\{\omega;B_{t+\frac{1}{n}}-B_t\ge 0\}$, $H=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}H_n=\bigcup_{m=k}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}H_n\in\mathcal{F}_{t+\frac{1}{k}}$, $\forall k$ より，$H\in\mathcal{F}_{t+}^B$ であるが，$\notin\mathcal{F}_t^B$

1.7 i) $\{\tau\le t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\tau<t+\frac{1}{n}\}=\bigcap_{n=k}^{\infty}\{\tau<t+\frac{1}{k}\}\in\mathcal{F}_{t+\frac{1}{k}}$, $\forall k$ だから，$\{\tau\le t\}\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_{t+\frac{1}{k}}=\mathcal{F}_{t+}=\mathcal{F}_t$.
$\{1_{[0,\tau]}(t)=1\}=\{\tau\ge t\}=\{\tau<t\}^c$, $\{1_{[0,\tau]}(t)=0\}=\{\tau>t\}=\{\tau\le t\}^c$ に注意すればよい．

1.8 ρ を距離とし，$G_n=\{x;\rho(x,F)<\frac{1}{n}\}$, $\sigma=\lim_{n\to\infty}\sigma_{G_n}$ とおくと道の連続性より，$X_\sigma=\lim_{n\to\infty}X_{\sigma_n}$. $\sigma_{G_n}\le\sigma_F,\forall n$ より $\sigma\le\sigma_F$ $X_\sigma\in G_n,\forall n$ より，$X_\sigma\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=F$, したがって $\sigma_F\le\sigma$. よって $\sigma=\sigma_F$ だから $\{\sigma_F\le t\}=\{\sigma\le t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\sigma_{G_n}<t\}\in\mathcal{F}_t$.

1.9 $\phi\in\mathcal{F}_\tau$ は明らか．$A\in\mathcal{F}_\tau$ のとき，$(A\cap\{\tau\le t\})\cup\{\tau>t\}\in\mathcal{F}_t$ だから $A\cup\{\tau>t\}\in\mathcal{F}_t$, したがって $A^c\cap\{\tau\le t\}=(A\cup\{\tau>t\})^c\in\mathcal{F}_t$. 次に $A_n\in\mathcal{F}_\tau$, $n=1,2,\cdots$, ならば $(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cap\{\tau\le t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap\{\tau\le t\})\in\mathcal{F}_t$.

1.10 (1.9) より $E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t-B_s)};A]=E[E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t-B_s)}|\mathcal{F}_s];A]=e^{-\frac{t-s}{2}|\xi|^2}P(A)$; $\forall A\in\mathcal{F}_s$ だから B_t-B_s が $\mathcal{F}_s$ が独立性がわかる．また (1.9) の平均をとればよい．逆は自明．

1.11 $E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t-B_s)}|\mathcal{F}_{s+}^B]=e^{-\frac{t-s}{2}|\xi|^2}$ を示せばよい．
$t>s+\frac{1}{n}$ のとき，$E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t-B_{s+\frac{1}{n}})}|\mathcal{F}_{s+\frac{1}{n}}^B]=e^{-\frac{t-s-\frac{1}{n}}{2}|\xi|^2}$ から $\forall A\in\mathcal{F}_{s+}^B$ に対して $E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t-B_{s+\frac{1}{n}})};A]=e^{-\frac{t-s-\frac{1}{n}}{2}|\xi|^2}P(A), n\to\infty$ として $E[e^{\sqrt{-1}\xi^*(B_t-B_s)};A]$ $=e^{-\frac{t-s}{2}|\xi|^2}P(A)$

1.12 $f(X_s)\le f(E[X_t|\mathcal{F}_s])\le E[f(X_t)|\mathcal{F}_s]$

1.13 補題 1.4.9 による．

1.14 $E[e^{B_t-B_s}|\mathcal{F}_s]=E[e^{B_t-B_s}]=e^{\frac{1}{2}(t-s)}$ よりわかる．

1.15 $E[M_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_s]=M_{\tau\wedge s}$ は定理 1.6.2 よりわかるから M^τ はマルチンゲール．$M\in\mathcal{M}_{4,c}$ のとき，$N_t=M_t^2-\langle M\rangle_t$ は二乗可積分マルチンゲールで $(M_t^\tau)^2-\langle M\rangle_{\tau\wedge t}=$

$M^2_{\tau\wedge t} - \langle M\rangle_{\tau\wedge t} = N_{\tau\wedge t}$ はマルチンゲールで $A_t \equiv \langle M\rangle_{\tau\wedge t} \in \mathcal{A}_{+,c}$.

1.16 補題 1.4.9 から明らか.

第2章

2.1 $X_t = \int_0^t f(s,\omega)dM_s$. 定義 2.3.1 のように $I(f^{(n)})(t,\omega)$ をとり, $X_t^{(n)} = I(f^{(n)})(t,\omega)$ ととると $X_t^{(n)} = \int_0^{t\wedge\rho_n} f(s,\omega)dM_s$. $\tau'_n = \inf\{t; |N_t| \geq n\}$, $\eta_n = \rho_n \wedge \tau'_n$ とおけば, $\langle X,N\rangle_{t\wedge\eta_n} = \langle X,N^{\eta_n}\rangle_t = \langle X^{\rho_n},N^{\eta_n}\rangle_t = \int_0^t f^{(n)}(s,\omega)d\langle M^{(n)},N^{\eta_n}\rangle_s = \int_0^t f^{(n)}(s,\omega)d\langle M,N\rangle_{\eta_n\wedge s} = \int_0^{t\wedge\eta_n} f(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s$ から $n\to\infty$ とするとき $\eta_n\to\infty$ なので $\langle X,N\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega)d\langle M,N\rangle_s$.

一意性. 定理 2.2.2 と同様にしてわかる.

2.2 f 有界で $M \in \mathcal{M}_{2,c}$ のとき, 分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対して $f^{(\Delta)}(s,\omega) = \sum f(t_i,\omega)1_{(t_i,t_{i+1}]}(s)$, $s = 0$, $f^{(\Delta)}(0,\omega) = f(0,\omega)$ とするとき, 左連続性より, $f^{(\Delta)}(s,\omega) \to f(s,\omega)$, $|\Delta| \to 0$, $\forall s,\omega$, $X_t^{(\Delta)} = \int_0^t f^{(\Delta)}(s,\omega)dM_s = \sum f(t_i)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$ で $E[\int_0^t |f^{(\Delta)}(s,\omega) - f(s,\omega)|^2 d\langle M\rangle_s] \to 0$ より, $E[|X_t^{(\Delta)} - X_t|^2] \to 0$. 一般の場合は定義 2.3.1 の τ_n を使って局所化の議論をする.

2.3 Fatou の補題を使えばよい.

2.4 必要性は任意抽出定理による. 十分性. $\sigma = s1_A + t1_{A^c}$, $A \in \mathcal{F}_s$, は停止時刻であり, $\tau \equiv t$ とすれば, $E[M_\sigma] = E[M_s; A] + E[M_t; A^c] = E[M_t]$ より, $E[M_s; A] = E[M_t; A], \forall A \in \mathcal{F}_s$ すなわち, $E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$.

第 3 章以降の分は省略する.

参 考 文 献

[1] 新井 朝雄，ヒルベルト空間と量子力学（本講座 16），共立出版，1997

[2] A. Bensoussan, *Stochstic Control by Functional Analysis Methods*, North Holland, Amsterdam, 1982

[3] A. Bensoussan, *Stochastic Control of Partially Observable Systems*, Cambridge University Press, 1992

[4] A. Bensoussan, *Perturbation Methods in Optimal Control*, Wiley/Gauthier-Villars, 1988

[5] A. Bensoussan, J.Frehse and H. Nagai, Some Results on Risk-Sensitive Control with Full Observation, *Appl. Math. Optim.*, 37 (1998)1-41

[6] A. Bensoussan and J.L. Lions, *Applications des Inequations Variationnelles en Contrôle Stochastiques*, Dunod, Paris, 1978

[7] A. Bensoussan and J.L. Lions, *Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi Variationnelles*, Dunod, Paris, 1982

[8] T.R. Bielecki and S.R. Pliska, Risk Sensitive Dynamic Asset Management, to appear in *Appl. Math. Optim.*

[9] M.G. Crandall, H. Ishii and P.L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. A.M.S.*, 27 (1993) 1-67

[10] R.J. Elliott and P.E. Kopp, *Mathematics of Financial Markets*, Springer, 1999

[11] W.H. Fleming and W.M. McEneaney, Risk-sensitive control on an infinite time horozon, *SIAM J. Control Optim.*, 33(1995) 1881-1915

[12] W.H. Fleming and R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Control*, Springer, 1975

[13] W.H. Fleming and M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions* Springer, New-York, 1993

[14] A. Friedman, *Stochstic Differential Equations and Applications* , Academic Press, New-York, 1975

[15] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, de Gruyter, 1994

[16] 舟木 直久，確率微分方程式，岩波書店，1997

[17] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York, 1983

[18] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland-Kodansha, Amsterdam, 1981

[19] H. Ishii, On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second order elliptic PDE's, *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 (1989) 14-45

[20] I. Karatzas, *Lectures on the mathematics of Finance*, CRM Monograph Series, AMS, 1996

[21] I. Karatzas and S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second edition, Springer-Verlag, New York, 1991

[22] I. Karatzas and S.E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer, 1998

[23] N.V. Krylov, *Controlled Diffusion Processes*, Springer-Verlag Berlin, 1980

[24] H. Kunita, *Stochastic flows and stochstic differential equations*, Cambridge University Press, 1990

[25] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, *Nagoya Math. J.* , 30 (1967) 209-245

[26] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 1996

[27] T. Lyons and W.A. Zheng, A Crossing estimate for canonical process on a Dirichlet space and a tightness result, *Asterisque*, 157-8 (1988) 249-271

[28] P. Malliavin, *Stochastic Analysis*, Springer, 1997

[29] 増田 久弥，発展方程式，紀伊国屋書店，1975

[30] W.M. McEneaney, G.G. Yin and Q. Zhang (Ed.), *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications*, Birkhäser, 1999

[31] P.A. Meyer and W.A. Zheng, *Construction de processus de Nelson reversibles*, Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Math. 1123, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1985

[32] 長井 英生，確率論と制御問題，数学のたのしみ 8 号，日本評論社 (1998) 57-68

[33] M. Nisio, On Stochastic Optimal Controls and Envelope of Markovian Semi-Groups, *Proceedings of Intern. Symp. SDE*, (1976) 297-325

[34] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer, 1995

[35] B. Øksendal, *Stochstic Differential Equations, An Introduction with Applications*, Fifth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998

[36] L.C.G. Rogers and D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, John Wiley and Sons, 1987

[37] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991

[38] 佐藤 健一，加法過程，紀伊國屋書店，1990

[39] 志賀 徳造，ルベーグ積分から確率論（本講座 10），共立出版，近刊

[40] 重川 一郎，確率解析，岩波書店，1998

[41] A.N. Shiryaev, *Essentials of Stochastic Finance, Facts, Models, Theory*, World Scientific, 1999

[42] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979

[43] 渡辺 信三，確率微分方程式，産業図書，1975

[44] D.Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1991

[45] T. Yamada, On some representations concerning stochstic integrals, *Prob. Math. Stat.*, 4(1984) 153-166

あとがき

渡辺信三「確率微分方程式」[43] が現れてから既に四半世紀近くが過ぎている．[43] が出版されたとき，筆者は大学院生であったが，その後，何かにつけこの碩学の手になる書物を参照させていただいた．これは，教科書のようでもあるが，実はほとんど専門書の内容をもっていたといってもよいであろう．日本の確率論研究者の多くがこの本のお世話になったと思われる．後に，この本は，広がりのある専門書 [18] にと発展し，国内外の確率論の多くの研究者に影響を与えた．その後，洋書では他に，確率微分方程式，確率解析に関連する優れた専門書もしくは教科書，[21][23],[24],[35],[36],[37],[42] が次々と刊行された．いずれも特色のある良書であるように思う．しかしながら，専門家以外の人間にとっては，確率微分方程式は依然入りづらい分野であり続けているように思われる．一つには，上に掲げた良書も分量として大部のものが多く，手っ取り早く学ぶのには，必ずしも適したものとなっていない点があろう．最近のように，確率微分方程式の応用分野が広がり，たとえば数理ファイナンスに関連して金融機関で働く人までが確率微分方程式を学ぼうとする時勢において，まだまだこの分野のいろいろなタイプの書物が刊行されてよいように思われる．実際，最近改訂された [35] は手っ取り早く，確率微分方程式のエッセンスを学んで，様々な応用に生かすといった視点から書かれているようである．この書物は初版より多くの読者を得て，版を重ねたものであり，最近大幅な改訂がなされ，また広く読まれているようである．谷口説男氏による邦訳も出版された．一方，本書は数学的な基礎をしっかり学んでから応用分野に入ろうとする場合にも適するように，数学的基礎をおろそかにしないで，かつ要領

よく学べるよう，基礎的部分をコンパクトにまとめ，応用との接点までをきっちり書くことに努めるよう意図したが，その意図は達成されたであろうか．たとえば，常微分方程式に関する書物が幾多あるようにはならないにしても，確率微分方程式に関する書物が，今後ますます，様々な角度から書かれてよいように思われる．

さて，本書を読むにあたっては，近々刊行される，[39] の 第 6 章の内容の知識は必要とされる．すなわち，測度論的立場に立つ，確率論の基礎的事項である．また，本書の 第 1 章や付録に関連して，離散時間マルチンゲールに関することは [44] が絶好の入門書であり，必要に応じて補ってほしい．本書では，確率過程の可測性の議論に深入りしないですむように，適合と，発展的可測の概念のみですませるようにした．可予測 (predictable) 等，確率過程のより詳しい可測性の概念は必要に応じて [37] やその引用文献を参照していただきたい．また，フィルトレーションの右連続性がなぜ必要になるか，零集合を付け加えておく必要が出てくるのはどこかをわかりやすくする等の技術的な工夫をした．一方，通常，Doob-Meyer 分解を用いてマルチンゲールの二次変分増加過程の存在をいうやり方が取られるが，本書では [37] にある，その存在を直接証明する方法を採用した．確率微分方程式の解のモーメント評価については，応用を意識して，通常書かれるより若干詳しくした．これについては，[23] が詳しい．さらに，拡散過程とコルモゴロフ方程式との関係，確率制御の値関数とベルマン方程式を一貫性をもたせて書くため，粘性解の方法を用い，その一意性に関する結果を補足した．その証明までをみていただければ，確率微分方程式の解に関する期待値を解析的に取り扱うのに粘性解の概念が極めて自然であることが理解されると思う．しかしながら，解析学との関係を記述するのに，必ずしも，粘性解の概念一本ですませなかったのは，他の解析的手法にそれぞれ長所があり，種々の応用を論じる際も，場合によって使い分ける必要が生じると思われるからである．特に，エネルギーの概念が関わるような場合には，粘性解で記述するよりも変分法的な取り扱いが有効であるように思われる．粘性解に関してのサーベイ [9] はその概念の創始者達による好個の案内である．本書の 2.6，2.7 節 や 6.4 節 の内容は証明方法にわたるまでおおむね，[18], [43] によっている．これは筆者がそれらで確率微分方程式を学習してきたことにもよるが，現在では標準的なものとなっていると思われるからである．また 6.1 節のバナッハ空間上の半群の生成作用素に関する記述は [38] に従った．推移確

率から決まる半群とその生成作用素に関して，Hille-吉田の理論に基づいた優れた詳しい記述がそこにあるので参照してほしい．この書物は，独立変数和の極限である確率過程，加法過程の専門書としてすでに名高い．

本書より詳しい教科書で，広く読まれているものに [21] がある．[21] や本書で確率微分方程式を学習して，さらに確率解析に関してのより進んだ学習，研究に進もうとする場合 [18],[36],[37] 等をその趣向に応じて読まれればよいであろう．特に，マリアヴァン解析という向きには [28],[34],[40]． 確率的流れの研究へと進む場合 [24] を，確率微分方程式の解としては必ずしも求められない拡散過程を取り扱い得るディリクレ形式を学習するには [15] と読み進めればよいであろう．ともに，指導的確率論研究者によって書かれた定評のある専門書である．最近，著しく応用が広がっている数理ファイナンスに関しては，数学者の書いたものとして [20],[22],[10],[26],[41] 等がある．[10],[26],[41] は本書と並行して読める．関連して，確率制御への応用へと進む場合，[2],[4],[13],[23] 等がある．[2] は変分法で，[4] は粘性解の方法を用いて確率制御問題を考察している．変分法を用いて確率制御を研究しようとする場合， [2] より詳しい [6],[7] は折りに触れ参照する必要が出るかもしれない．[13] には，待ち行列ネットワークや数理ファイナンスにしばしば現れる特異制御についての詳しい記述がある．エルゴード型確率制御やベルマン方程式の摂動に関しては，[4] が参考になる．[4],[6],[7] を読むには，解析学にある程度深入りする心構えが必要であろう．ベルマン原理の証明，Krylov の不等式 は [23] が参考になる．またそこでは超関数を用いた，ベルマン方程式の取り扱い，マルコフ選択に関する詳しい記述がある．難解であるが，数学的内容が深いと感じられる．本書の第 5,6 章 および付録 の確率制御に関連する部分を書くに当たっては [23] や [2] と [19] を参照させていただいた． 確率制御の研究の勃興期に確率制御問題を確率微分方程式を用いて数学的厳密に定式化することに関わった人達による [12] は一般的な制御問題の定式化や変分学との関連等，基礎知識を得る上でしばしば参考になる．しかしながら，制御理論の分野は基本的な考え方で ’80 年代に変化があり，現在ではその考え方を理解することが重要であろう．その考え方が確率制御の研究にも及び，’90 年代の確率制御の研究は大きく変化したからである．そのため，関連する論文等を直接読む必要があろう．すなわち，ロバスト性との関連から，本書で取り扱った評価関数とは異なる，リスク鋭感的評価関数 (risk-sensitive

criterion)：

$$E[e^{\theta\{\int_0^T f(X_s,\gamma_s)ds+\varphi(X_T)\}}]$$

を対象とする確率制御問題，およびその特異極限を考察することがその中心的話題となっている．ここで，θ はリスク鋭感的パラメータと呼ばれるもので，その大きさはロバスト性との関連から，制御の実際問題を考察する際に重要な意味をもつ．また，数理ファイナンスへの応用としても，ポートフォリオ最適化の問題でリスク鋭感的確率制御問題の枠組みで論じられるものに重要と思われるものがあり，この方面への発展が今後見込まれる．現在発展しつつある生き生きとした応用分野との関連からは，この周辺のことまで記述できればよかったかもしれないが，教科書に盛り込む内容として現時点では適切であるとは言いきれない段階であろう．関連する文献をあげるにとどめる．[5],[8],[11],[32] やその引用文献参照．またフィルタリングや部分可観測系の確率制御問題については成書 [3] がある．確率制御やフィルタリングの研究の初期からこれまで指導的立場を維持し続けている Fleming の 70 才 を記念して出版された論文集 [30] は彼の周辺の，確率制御，フィルタリング，数理ファイナンスに関連する最近の研究傾向を表していて参考になることが多いだろう．数理物理や統計物理との関連は [16] にある記述を参考にしてほしい．

記　号　表

R^N	N 次元ユークリッド空間
R_+	非負実数全体
C	複素数全体
Z	整数全体
Z_+	非負整数全体
$R^N \otimes R^m$	$N \times m$ 行列全体
$A \ominus B := (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, A^c: 集合 A の補集合	
S^N	N 次対称行列全体
A^*	行列 A の転置行列
$a \wedge b := \min(a,b)$, $a \vee b := \max(a,b)$	
$a_+ := \max(a,0)$, $a_- := -\min(a,0)$	
μ_X	確率変数 X の分布
$\mathcal{B}(\Xi)$	距離空間 Ξ の位相的ボレル集合族
$\sigma(X)$	確率変数 X で生成される σ 加法族
$W^N = \mathbf{C}([0,\infty); R^N)$	$[0,\infty)$ で定義され，R^N に値をとる連続関数全体
$W_T^N = \mathbf{C}([0,T]; R^N)$	$[0,T]$ で定義され，R^N に値をとる連続関数全体
$\mathcal{F}_t$	フィルトレーション（σ 加法族の増大系）
$\mathcal{B}_t(W^N)$	W_t^N の位相的ボレル集合族
$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{c>0} \mathcal{F}_{t+c}$	
$\mathcal{F}_t^B$	ブラウン運動の生成するフィルトレーション
$\mathcal{F}_\sigma := \{A \in \mathcal{F}; A \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t\}$, σ : 停止時刻	
$E[X\|\mathcal{F}]$	σ 加法族 $\mathcal{F}$ によって条件をつけた，確率変数 X の条件付き期待値

$\mathcal{A}$	有界変動過程全体,
	$\mathcal{A}_+$: 増加過程全体 cf. 1.7 節
$\mathcal{A}_{+,c}$	連続増加過程全体
$\mathcal{A}_c$	連続有界変動過程全体
$\mathcal{M}_p$	p 乗可積分マルチンゲール全体
$\mathcal{M}_{p,c}$	p 乗可積分連続マルチンゲール全体
$\mathcal{M}_{c,loc}$	連続局所マルチンゲール全体
$Q_t(M;\Delta)$	cf. 1.7 節
$\mathcal{M}_p(0,T)$	cf. 2.1 節
$\mathcal{M}_{p,c}(0,T)$	cf. 2.1 節
$\mathcal{L}_p(\langle M\rangle)$	cf. 2.1 節
$\mathcal{L}_p(0,T;\langle M\rangle)$	cf. 2.1 節
$\mathcal{L}_0$	cf. 2.1 節
$\langle M\rangle$	cf. 1.7 節
$\langle M,N\rangle$	cf. 1.7 節
$P-\lim$	確率収束極限
$\mathbf{C}$	連続関数全体, $\mathbf{C}^k$: k 回連続的微分可能な関数全体, $k=1,2,\cdots,\infty$
$\mathbf{C}^i_K$	i 回連続的微分可能で台がコンパクトな関数全体
$\mathbf{C}_\infty$	cf. 4.1 節
$\mathbf{C}^k_b$	k 回微分までが有界な関数な関数全体
$\mathbf{C}^{i,j}([0,T)\times R^N)$	$t\in[0,T)$ について i 回 $x\in R^N$ について j 回 連続的微分可能な関数全体, $i,j\in Z_+$
$\mathbf{C}^{i,\alpha}$	i 回 微分が α 次ヘルダー連続である関数全体, $i\in Z_+$, $\alpha\in[0,1)$
$\mathbf{B}(R^N)$	R^N 上可測関数全体
$\mathbf{B}_b$	有界可測関数全体
$\mathbf{L}^p$	p 乗可積分関数全体
$\mathbf{L}^\infty$	本質的に有界な関数全体
$\mathbf{W}^{i,p}$	cf. 6.2, 6.6 節

$\mathbf{W}_0^{i,p}$	cf. 6.7 節
$\\| A \\|$	行列 $A = (A_{i,j})$ のノルム $= \sqrt{\sum_{i,j} \|A_{i,j}\|^2}$

$\| f \|_\infty := \sup_x |f(x)|$ または $= \operatorname{ess\,sup}_x |f(x)|$

$D_i f$	f の x_i に関する微分
$D_{ij} f$	$D_j f$ の x_i に関する微分

$Du := (D_1 u, D_2 u, \cdots, D_N u)$; $D^2 u := (D_{ij} u)$

$\Delta f := \sum_i D_{ii} f$

a.s.	almost surely または almost sure の略．確率 1 で
s.t.	such that の略

索　　引

著者略歴

長井英生（ながい ひでお）

1975年　大阪大学大学院理学研究科修士課程修了
現　在　大阪大学大学院基礎工学研究科教授
　　　　理学博士

共立講座 21世紀の数学
第27巻（全27巻）
確率微分方程式

1999年7月25日　初版1刷発行

検印廃止
NDC 417.1
ISBN 4-320-01579-7

発行者　南條光章
発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向4-6-19
電話　03-3947-2511（代表）
郵便番号　112-8700
振替口座　00110-2-57035

印　刷　啓文堂
製　本　中條製本工場

社団法人
自然科学書協会
会員

Printed in Japan